Département de l'éducation, de la culture et du sport
Service de l'enseignement
Lycée - Collège des Creusets, Sion

Departement für Erziehung, Kultur und Sport
Dienststelle für Unterrichtswesen
Kollegium Creusets, Sitten

CANTON DU VALAIS
KANTON WALLIS

Lycée Collège Creusets

Examens de maturité 2010

Mathématiques renforcées DF — **Version B**

PROBLÈME 1

Soit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto x - 2 + 2e^{-x/2}$

1) En écrivant $f(x) = x\left(1 - \frac{2}{x} + \frac{2e^{-x/2}}{x}\right)$, montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

2) Faire l'étude complète de la fonction f et construire sa représentation graphique (unité : 1 cm). <u>Indication</u> : $f(x) = 0$ uniquement lorsque $x = 0$.

3) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f , la droite $y = x - 2$, et les droites $x = 2$ et $x = k$ (avec $k > 2$).
Cette aire admet-elle une limite lorsque $k \to +\infty$?

PROBLÈME 2

Dans l'espace E_3 muni d'un repère orthonormé, on considère la sphère Σ de centre $C(1 ; 2 ; -3)$ et de rayon 6 ,

et les droites $d : \begin{cases} x = -1 + 2k \\ y = 10 - 2k \\ z = -1 + k \end{cases}$ et $g : \begin{cases} x = 4 + 3m \\ y = -7 - 4m \\ z = 9 + m \end{cases}$

1) Calculer la distance entre les droites d et g .
2) Déterminer l'équation cartésienne du plan α passant par le point C et contenant la droite d .
3) Montrer que la droite d est tangente à la sphère Σ .
4) Déterminer l'équation cartésienne du plan β contenant la droite d et tangent à la sphère Σ .
5) Le plan π d'équation $x + y + z + 6 = 0$ coupe la sphère Σ en un cercle : déterminer le centre et le rayon de ce cercle.

PROBLÈME 3

Soit h un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par sa matrice relativement à la base canonique (e_1 , e_2 , e_3) :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ m & m & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Les vecteurs $h(e_1)$, $h(e_2)$, $h(e_3)$, forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$? Justifier !

2) <u>On pose $m = -1$</u> .
a) Déterminer les valeurs propres de h .
b) Déterminer l'ensemble $E = \{ u = (x;y;z) \mid h(u) = -2u \}$.

3) <u>On pose $m = 0$</u> .
Déterminer Ker h et Im h et donner leur dimension ; donner également une base de Ker h et une base de Im h .

PROBLÈME 4

Une urne contient 10 boules : 4 blanches et 6 noires.

1) On tire <u>5 fois de suite</u> une boule de l'urne, <u>en remettant</u> chaque fois la boule dans l'urne avant de tirer la suivante.
a) Calculer la probabilité de tirer 3 boules blanches et 2 boules noires (dans un ordre quelconque).
b) Calculer la probabilité de tirer au moins une boule blanche.
c) Calculer la probabilité que la dernière boule tirée soit noire.
d) Calculer la probabilité que la dernière boule tirée soit noire, sachant que l'on a tiré 3 boules blanches et 2 boules noires (dans un ordre quelconque).

2) On organise le jeu suivant : une partie consiste à tirer <u>simultanément</u> trois boules de cette urne. Chaque boule blanche tirée rapporte 1 franc, tandis que les boules noires ne rapportent rien.
a) Soit X la variable aléatoire indiquant les gains possibles pour une partie : donner (sous forme de tableau) la loi de probabilité de X .
b) Calculer la probabilité de gagner un nombre impair de francs.
c) Quel prix maximal un joueur peut-il accepter de payer pour chaque partie s'il veut que le jeu ne lui soit pas défavorable ? Justifier !

Fin