Application des maths

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrages et matériels autorisés :	• calculatrice • formulaire • PC avec Mathematica
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Consigne :

Le problème 1 ainsi que les problèmes 2.1 et 2.2 sont à réaliser uniquement à la main (sans l'aide de l'ordinateur). Les problèmes 2.3, 2.4 et 5.3 doivent être résolus exclusivement à l'aide de Mathematica. Il est vivement conseillé de résoudre les autres problèmes avec Mathematica, bien qu'ils puissent être résolus partiellement ou totalement à la main.

Problème 1 (7 points)

A 19h00, on sort du four une tarte aux pommes dont la température est à 180°. On désigne par $T(t)$ la température de la tarte t heures après la sortie du four.

On suppose que la vitesse de refroidissement $T'(t)$ est proportionnelle à la différence de température entre la température de la tarte et la température de la cuisine (loi de Newton).

1.1 Si la température de la cuisine est de 20° et qu'à 19h15 la tarte est encore à 100°, à quelle heure la tarte sera-t-elle à 25° ?

1.2 Au moment où la température de cette tarte était à 63.3°, de combien de degrés par minute (taux de variation instantané) était-elle en train de refroidir ?

Problème 2 (16 points)

On cherche à déterminer la fonction $f(x)$ qui satisfait aux conditions suivantes :

$$\begin{cases} \displaystyle\int_1^x f(t)dt & = \dfrac{(f(x))^3}{x} - 1 \\ \\ f(1) & = 1. \end{cases}$$

2.1 Démontrer que si la fonction $f(x)$ satisfait aux conditions ci-dessus, alors elle est également la solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} 3\,x\,y'\,y & = x^2 + y^2 \\ y(1) & = 1. \end{cases}$$

2.2 Montrer que cette équation différentielle est homogène, puis calculer sa solution $f(x)$ satisfaisant à la condition initiale donnée.

2.3 Description de la méthode d'Euler modifiée :

$$
\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + h, \\ y_{n+1} &= y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)). \end{aligned}}
$$

Implémenter en Mathematica la méthode d'Euler modifiée décrite ci-dessus dans un module qui a l'en-tête suivant :

modifiedEuler[f_, x0_, y0_, a_, n_].

Ce module doit retourner en output la valeur estimée par cette méthode de $y(a)$ où y est la solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ sous la condition initiale $y(x_0) = y_0$, et n est le nombre de pas de la méthode.

2.4 On suppose que l'on peut estimer l'erreur globale $e(h)$ d'une méthode d'ordre p pour un pas de longueur h par la relation suivante :

$$e(h) = Ch^p.$$

A l'aide de l'équation différentielle donnée en (2.1), estimer la valeur de $f(2)$ par la méthode d'Euler modifiée avec un pas de longueur $h = \frac{1}{64}$, puis illustrer le fait que la méthode est d'ordre 2 en calculant $e(h)$ pour $h = \frac{1}{256}$ et $h = \frac{1}{512}$, tout en sachant que la solution exacte de cette équation est

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^{\frac{2}{3}} + x^2}}{\sqrt{2}}.$$

Problème 3 **(11 points)**

Si l'on connaît les valeurs $f(h)$, $f'(h)$ et $f(-h)$ d'une fonction f donnée, alors on peut chercher à obtenir un polynôme (d'interpolation) de la forme $q(x) = ax^2 + bx + c$ qui vérifie $q(h) = f(h)$, $q'(h) = f'(h)$ et $q(-h) = f(-h)$.

3.1 Déterminer ce polynôme d'interpolation $q(x)$, puis calculer et simplifier l'intégrale

$$\int_{-h}^{2h} q(x)dx.$$

3.2 Vérifier que l'égalité

$$\int_{-h}^{2h} q(x)dx = h(\frac{3}{4}q(-h) + \frac{9}{4}q(h))$$

est vraie pour $q(x) = x^2 + 2x - 5$.

3.3 On veut estimer la valeur exacte de l'intégrale Int(h) $= \int_{-h}^{2h} f(x)dx$ par son approximation $\text{Est}(h) = h(\frac{3}{4}f(-h) + \frac{9}{4}f(h))$.
Montrer que

$$|\text{Int}(h) - \text{Est}(h)| \leq \frac{3h^4}{8} \max_{x\in[-h,2h]} |f^{(3)}(x)|$$

pour toute fonction f qui est 3 fois continûment dérivable sur $[-h, 2h]$.

Problème 4 (9 points)

On donne l'ellipse (E) d'équation :

$$2x^2 - 2xy + y^2 + 4x - 6y + 3 = 0.$$

4.1 Déterminer les coordonnées du point P de l'ellipse (E) dont l'ordonnée est minimale.

4.2 Calculer l'équation de l'axe focal et les coordonnées du centre C de l'ellipse (E).

4.3 Représenter graphiquement l'ellipse (E), son centre C et le point P.

Problème 5 (10 points)

On donne la fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de période 2π telle que

$$f(x) = \frac{x^2}{4} \text{ pour } -\pi \leq x \leq \pi.$$

5.1 Montrer que la série de Fourier de $f(x)$ est

$$\frac{\pi^2}{12} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos(kx)}{k^2}.$$

5.2 Démontrer à l'aide de la série de Fourier ci-dessus que

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ .$$

5.3 Ainsi la suite $u_n = \sqrt{6 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}}$ converge vers le nombre π.
A l'aide d'une boucle dans Mathematica, déterminer le plus petit entier n tel que l'erreur absolue entre π et u_n soit inférieure à 10^{-4}.