MATHÉMATIQUES STANDARD

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrages et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6
Remarque :	version pour les **non** répétants

Problème 1 **(21 points)**

Partie A On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x-1)^2}$$

1.1 Déterminer le domaine de définition de f.

1.2 Etudier le signe de f.

1.3 Déterminer les équations des éventuelles asymptotes au graphe de f.

1.4 Etudier la variation de f, en commençant par montrer que

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{(x-1)^3}$$

1.5 Tracer le graphe de f dans un repère orthonormé (unité : 1 carré).

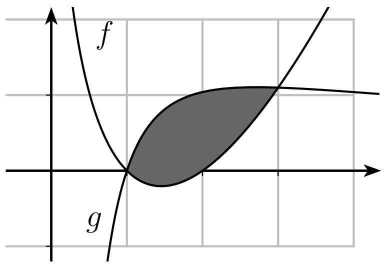
Partie B Soient f et g les deux fonctions définies par

$$f(x) = (x-2)\ln(x)$$

et

$$g(x) = \frac{3\ln(x)}{x}$$

Calculer l'aire du domaine grisé sur la figure ci-contre.



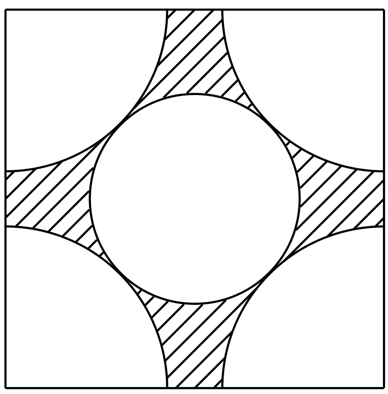
Problème 2 **(7 points)**

On considère un carré dont les côtés mesurent 4 cm. Dans ce carré, on trace un cercle centré sur l'intersection des diagonales. On trace aussi quatre quarts de cercle centrés à chaque sommet du carré. Ils sont tous tangents au cercle central, comme illustré sur la figure ci-dessous.

Dans les questions suivantes, r désigne le rayon du cercle central.

2.1 La plus petite valeur admise pour r est celle pour laquelle les quatre quarts de cercle sont tangents entre eux. Calculer cette valeur de r.

2.2 Pour quelle valeur de r l'aire hachurée est-elle maximale ?



Problème 3 **(14 points)**

Les questions doivent être résolues analytiquement. Tous les calculs doivent figurer sur la feuille.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère :

- le plan α : $6x + y - 2z + 10 = 0$ contenant le point $A(-1\,;\,0\,;\,2)$;
- la droite d passant par le point $D(0\,;\,2\,;\,-3)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$;
- le point $B(5\,;\,-3\,;\,-2)$.

3.1 Déterminer l'équation cartésienne du plan β contenant la droite d et le point B.

3.2 Calculer l'angle entre la droite d et le plan α.

3.3 On considère le triangle BCD dont on connaît le sommet $C(\lambda\,;\,-2\,;\,-1)$. Déterminer les valeurs réelles de λ telles que l'aire de ce triangle soit égale à $3\sqrt{2}$.

3.4 On considère une sphère Σ de centre B. L'intersection de Σ avec α est un cercle de rayon 3. Calculer le rayon de Σ.

Problème 4 **(10 points)**

On considère une urne qui contient deux boules vertes, cinq boules rouges et huit boules jaunes.

Les trois parties du problème peuvent être résolues indépendamment.

4.1 On considère un jeu qui se déroule **sans remise**. On commence par tirer une boule de l'urne. Si elle est jaune, on a gagné. Si elle est rouge, on a perdu. Si elle est verte, on effectue un nouveau tirage. Le jeu s'arrête dès qu'on a gagné ou perdu.

a) Calculer la probabilité de gagner lorsqu'on joue à ce jeu.

b) Sachant qu'on a perdu en jouant à ce jeu, quelle est la probabilité qu'on ait tiré au moins une boule verte ?

4.2 On effectue vingt tirages successifs **avec remise**. Calculer la probabilité qu'on tire exactement six boules rouges, onze boules jaunes et trois boules vertes.

4.3 On prend **simultanément** quatre boules dans l'urne.

a) Calculer la probabilité qu'on ait pris des boules d'au moins deux couleurs différentes.

b) Calculer la probabilité qu'on ait pris des boules de trois couleurs différentes.