Mathématiques renforcées

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 (11 points)

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{5x}{e^{|m-x|}}, m \in \mathbb{R}$$

1.1 On pose $m = 2$. Etudier la fonction f, y compris sa dérivée seconde, et représenter son graphe dans un repère orthonormé (unité : 2 carrés).

1.2 Pour quelle(s) valeur(s) de m les deux demi-tangentes du graphe de f en son point anguleux sont-elles perpendiculaires ?

Problème 2 (8 points)

Soit la parabole (p) : $y = x^2$.

2.1 Déterminer le point de la parabole (p) le plus proche du point $A(1; 2)$.

2.2 Soit S la surface délimitée par la droite d'équation $y = 2x$ et la parabole (p). Lorsqu'elle tourne autour de l'axe d'équation $x = 2$, cette surface S engendre un corps de révolution : calculer le volume de ce dernier.

Problème 3 (6 points)

Je lance un dé jusqu'à ce que j'obtienne deux fois de suite (consécutivement) le même nombre et je note n le nombre de fois que j'ai dû lancer le dé. Soit X la variable aléatoire discrète qui, à une telle suite de lancers, fait correspondre ce nombre n.

3.1 Etablir la distribution (loi) de probabilité de X.

3.2 Calculer la probabilité de devoir lancer le dé au moins 5 fois.

Problème 4 (6 points)

Je lance un dé 600 fois.

4.1 Expliquer, sans effectuer tous les calculs et en utilisant la loi binomiale, comment on peut calculer la probabilité d'obtenir un six entre 90 et 110 fois (bornes comprises).

4.2 Estimer cette probabilité à l'aide de la loi normale.

Problème 5 (11 points)

Relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$, on définit les endomorphismes f et g par leur matrice :

$$F = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer que la matrice F est obtenue en enlevant la première ligne et première colonne de la matrice G.

5.1 Calculer F^2 et G^2. En déduire les matrices inverses de F et de G.

5.2 Trouver la matrice B telle que $F \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3 Déterminer l'équation cartésienne de l'ensemble des $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$ qui sont l'image par g du plan vectoriel d'équation $4x - y + 2z = 0$.

5.4 Calculer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. En déduire (aucun calcul supplémentaire n'est nécessaire) les valeurs propres de g et les sous-espaces propres associés.

5.5 Caractériser géométriquement les endomorphismes f et g.

Problème 6 (13 points)

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on définit, en fonction du paramètre réel m, (S_m) comme l'ensemble des points $P(x; y; z)$ tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 - 16x + 4mx - 10y - 2my - 8z - 4mz + 9m^2 - 6m + 80 = 0.$$

On considère également la droite (d) : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$.

6.1 Montrer que (S_m) est une sphère de rayon 5 et que son centre C_m décrit la droite (d) lorsque m décrit $\mathbb{R}$.

6.2 Montrer que $(S_0) \cap (S_2)$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon. Puis calculer les coordonnées des points d'intersection de ce cercle avec le plan d'équation $y = x$.

6.3 Déterminer l'équation de la sphère (S_m) la plus proche de l'origine O.

6.4 Déterminer l'ensemble des centres C_m tels que toutes les coordonnées des points de la sphère (S_m) soient strictement positives.