

Examens de maturité 2011

Mathématiques Renforcées DF

Version B

Exercice 1

1. Effectuer l'étude complète de la fonction $f(x) = (x^2 - 3x) e^{-\frac{x}{2}}$ et construire sa représentation graphique (unité : 1 cm).
2. Déterminer l'équation de la tangente à la représentation graphique de f en $x_0 = 2$
3. Posons $g(x) = -3x e^{-\frac{x}{2}}$.

Calculer le volume V du domaine engendré par la rotation autour de l'axe O_x de la courbe représentative de g entre les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

Exercice 2

Dans l'espace E_3 muni d'un repère orthonormé, on considère

- les droites d et g , données par leurs équations paramétriques :

$$d : \begin{cases} x = 6 - 3k \\ y = -2 + 2k \\ z = -5 + 6k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} x = 7 + 2m \\ y = -4 - 2m \\ z = 3 + m \end{cases} \quad (m \in \mathbb{R})$$

- les plans α, β et γ d'équations :

$$\alpha : 4x - 3y + 5z + 6 = 0 \quad \beta : 3x + 6y - 10z - 23 = 0 \quad \gamma : 2x + 4y + z - 6 = 0$$

- la sphère Σ d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 10y + 2z + 26 = 0$

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan π formé par les droites d et g .
2. Déterminer les coordonnées du point d'intersection A des droites d et g .
3. Déterminer l'angle aigu φ formé par les plans α et β .
4. Déterminer les équations paramétriques de la droite d'intersection i des plans α et β .
5. Déterminer l'équation de la sphère Σ' , symétrique de Σ par rapport au plan γ .

Exercice 3

Léonard a une nouvelle passion, le jardinage. Très motivé, il a acheté un paquet de graines standard de tournesol, nommées T60, sur lequel figure la mention suivante : "Attention, seulement 60% des graines germent".

1. Léonard sème 6 graines. Quelle est la probabilité p_1 de voir apparaître au moins 2 tournesols ?
2. Sur sa terrasse, Léonard possède 5 bacs à fleurs et il souhaite voir fleurir un tournesol dans chaque bac. Pour augmenter ses chances, il décide de mettre deux graines dans chaque bac, quitte à jeter ensuite une pousse si les deux graines germent. Quelle est la probabilité p_2 que le souhait de Léonard se réalise ?
3. Devant sa maison, Léonard souhaite avoir au moins un tournesol. Combien de graines doit-il semer au minimum pour que la probabilité d'en voir germer au moins une soit supérieure ou égale à 0.9997 ?
4. Léonard apprend par une publicité qu'il existe une nouvelle sorte de graines, T90, dont 90% germent. Il achète d'un paquet de T90, qu'il ajoute à son paquet de graines standard T60, obtenant ainsi un mélange formé de deux tiers de T90 et un tiers de T60. Quelle est la probabilité p_3 qu'une graine choisie au hasard dans ce mélange germe ?
5. Léonard plante une graine prise dans son mélange et, plus tard, il voit apparaître un tournesol. Quelle est la probabilité p_4 que la graine plantée par Léonard soit une graine T90 ?

Exercice 4

Soit la matrice $H = \begin{pmatrix} 3 & m & -5 \\ m & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

1. Pour quelle(s) valeur(s) de m la matrice H n'est-elle pas inversible ?
2. Posons $m = 4$ dans la matrice H qui définit alors une application linéaire h relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .
 - a. Déterminer $\text{Ker}(h)$, sa dimension et une de ses bases
 - b. Déterminer $\text{Im}(h)$, sa dimension et une de ses bases
 - c. L'application linéaire h est-elle un isomorphisme ? Justifier.

FIN