JURA CH RÉPUBLIQUE ET CANTON DU JURA

CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Session 2011 **OS Physique - Application des mathématiques**

MATHÉMATIQUES

Temps à disposition : 4 heures
Note maximale (6) pour 5 problèmes justes
Fascicule "Extraits des formulaires et tables" à disposition
Machine à calculer non graphique et non programmable autorisée

1. Étude d'une courbe paramétrée

Étudier, puis représenter (unité : 2 cm) la courbe d'équations paramétriques

$$x(t) = \frac{t^3}{t^2-1} \qquad \text{et} \qquad y(t) = \frac{t \cdot e^{-t}}{t-1}.$$

2. Géométrie dans l'espace

Dans un repère orthonormé, on donne le plan α d'équation $2x + 4y - z + 17 = 0$, le plan β déterminé par les points $A(3;-1;-2)$, $B(0;2;4)$, $C(5;-1;2)$ ainsi que la droite $s : \begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 22 + 14t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$.

2.1 Montrer que les plans α et β sont strictement parallèles.

2.2 Calculer les coordonnées de l'intersection S de la droite s avec le plan α.

2.3 Calculer l'angle que forme la droite s avec le plan α.

2.4 Calculer la distance entre les plans α et β.

Soit le cercle K centré au point $\Omega(4;0;4)$, de rayon $r = \sqrt{14}$ et contenu dans le plan β.

2.5 Montrer que le cercle K est tangent à la droite (AB) et calculer le point de tangence.

2.6 Existe-t-il un cône droit de base le cercle K et dont le sommet S' appartient à la droite s ? Si oui, calculer les coordonnées du point S'. Si non, expliquer pourquoi.

3. Analyse

Soit la fonction $f(x) = \dfrac{4x+8}{x+3}$ dont la représentation graphique est l'hyperbole H, et soit le point A d'abscisse $x_A = 1$ qui appartient à H.

3.1 Déterminer les asymptotes de H et les coordonnées des points d'intersection de H avec les axes, puis esquisser l'hyperbole.

3.2 Déterminer l'équation de la droite t tangente à H au point A.

3.3 Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{4x+8}{x+3} = a + \dfrac{b}{x+3}$.

3.4 Soit D le domaine fermé, limité par la droite t, la verticale $x = -2$ et l'hyperbole H. Calculer l'aire de D.

3.5 Soit C un point d'abscisse $x < -3$ et appartenant à H. On considère le rectangle de diagonale $[AC]$ dont les côtés sont parallèles aux axes de référence.

3.5.1 Calculer l'aire du rectangle en fonction de x.

3.5.2 Pour quelle valeur de x cette aire est-elle extrémale ? S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ?

Suite au verso

4. Probabilités

Un jeu se déroule en un maximum de trois phases appelées $P1$, $P2$ et $P3$.

$P1$: On tire un jeton d'une urne contenant trois jetons verts et sept jetons rouges.
Si le jeton tiré est rouge, le jeu est terminé.
Si le jeton est vert, on passe à la deuxième phase.

$P2$: On tire un jeton d'une urne contenant six jetons jaunes et quatre jetons verts.
Si le jeton tiré est jaune, on reçoit un billet de 10 francs et le jeu est terminé.
Si le jeton est vert, on passe à la troisième phase.

$P3$: On tire un jeton d'une urne contenant un jeton vert, cinq jetons bleus et quatre jetons rouges.
Si le jeton tiré est vert, on reçoit un billet de 100 francs et le jeu est terminé.
Si le jeton est bleu, on reçoit un billet de 20 francs et le jeu est terminé.
Si le jeton est rouge, le jeu est terminé.

4.1 On joue une fois

4.1.1 Calculer la probabilité des événements suivants.

A : Recevoir un billet de 100 francs.
B : Ne rien recevoir.
C : Recevoir un billet d'une valeur supérieure ou égale à 20 francs.

4.1.2 Pour participer au jeu, il faut payer une certaine mise. Calculer la valeur de cette mise pour que le jeu soit équitable.

4.1.3 Sachant qu'on n'a rien reçu, quelle est la probabilité d'avoir tiré trois jetons ?

4.2 On joue cinq fois

Quelle est la probabilité qu'on reçoive des billets pour un montant total de 100 francs ?

4.3 On joue dix fois

Quelle est la probabilité des événements suivants.

D : Recevoir exactement six billets de 10 francs.
E : Recevoir exactement un billet de 100 francs et quatre billets de 10 francs.

4.4 On joue mille fois

Calculer une valeur approchée de la probabilité de recevoir entre 9 et 16 billets de 100 francs (bornes comprises).

4.5 Calculer combien de fois il faut jouer pour que la probabilité de gagner au moins une fois un billet de 100 francs soit supérieure à 0.99 ?

5. Limite, équation différentielle, équation du deuxième degré dans C, algèbre linéaire

5.1 Calculer

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{x^3}.$$

5.2 Résoudre dans $\mathbf{C}$

$$z^2 + (1-3i)z + 10 - 5i = 0.$$

5.3 Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$x^2y' + xy = x^2 + y^2.$$

5.4 Soit un endomorphisme h de $\mathbf{R^2}$ donné par sa matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

5.4.1 Soit $u = (1;-1)$ et $v = (3;-1)$. Sans utiliser le polynôme caractéristique, montrer que u et v sont les vecteurs propres de h et en déduire les valeurs propres associées.

5.4.2 Écrire la matrice $\mathbf{A'}$ de h relativement à la base (u, v). Calculer $\mathbf{A'^5}$, puis déterminer $\mathbf{A^5}$ en effectuant le changement de base adéquat.