Problème 1 (poids 3)

Une courbe paramétrée plane est donnée par deux fonctions x et y du temps t, $c:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

Les fonctions x et y sont données par des équations différentielles du deuxième ordre et des conditions initiales :

- $x''(t) = -x(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$
- $y''(t) = -y(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$

Remarque
Le but de l'exercice n'est pas de trouver les solutions exactes des équations différentielles.

a) Calculer une approximation de $x(1)$ en employant la méthode de Runge avec 2 pas.

b) Calculer une approximation de $y(1)$ en employant la méthode d'Euler avec 4 pas.

c) En employant les résultats des questions a) et b), tracer une ligne brisée, formée de deux segments, qui approche très approximativement la courbe c pour $t \in [0;1]$.

On applique la méthode d'Euler aux fonctions x et y avec un pas h, $0 < h \leq 1$.
On appelle t_0 la plus petite valeur positive de t pour laquelle l'estimation de x est négative.
Appelons x_0 cette estimation de x et y_0 l'estimation de y correspondant à cette valeur t_0 de t.
Les nombres t_0 , x_0 et y_0 dépendent de h et le point $P_0(x_0; y_0)$ est proche de l'axe des ordonnées.

d) Écrire une procédure qui détermine t_0, le pas h étant lu dans une zone de texte. La procédure affichera également x_0 et y_0.

On cherche un pas h de la forme $h = \frac{1}{2^n}$ tel que $|x_0|$ soit petit.
Le nombre n est un entier positif.

e) Écrire un programme qui détermine le plus petit nombre n tel que, dans la procédure de la question précédente, on ait l'inégalité $|x_0| \leq 2^{-10}$.

Avec la valeur de h trouvée à la question e), on cherche une estimation de la longueur de la courbe comprise entre le point initial $(1; 0)$ et le point P_0 (pour t compris entre 0 et t_0).

f) Compléter le programme de la question e) de façon qu'il affiche cette estimation.

Problème 2 (poids 2)

On donne une courbe paramétrée, $c:\begin{cases} x(t) = -9t^2 + 6t \\ y(t) = 8t^3 - 15t^2 + 9t - 1 \end{cases}$ avec $t \in [0;1]$.

La courbe est esquissée ci-dessous.

a) Déterminer les points d'intersection de la courbe et de l'axe des ordonnées.

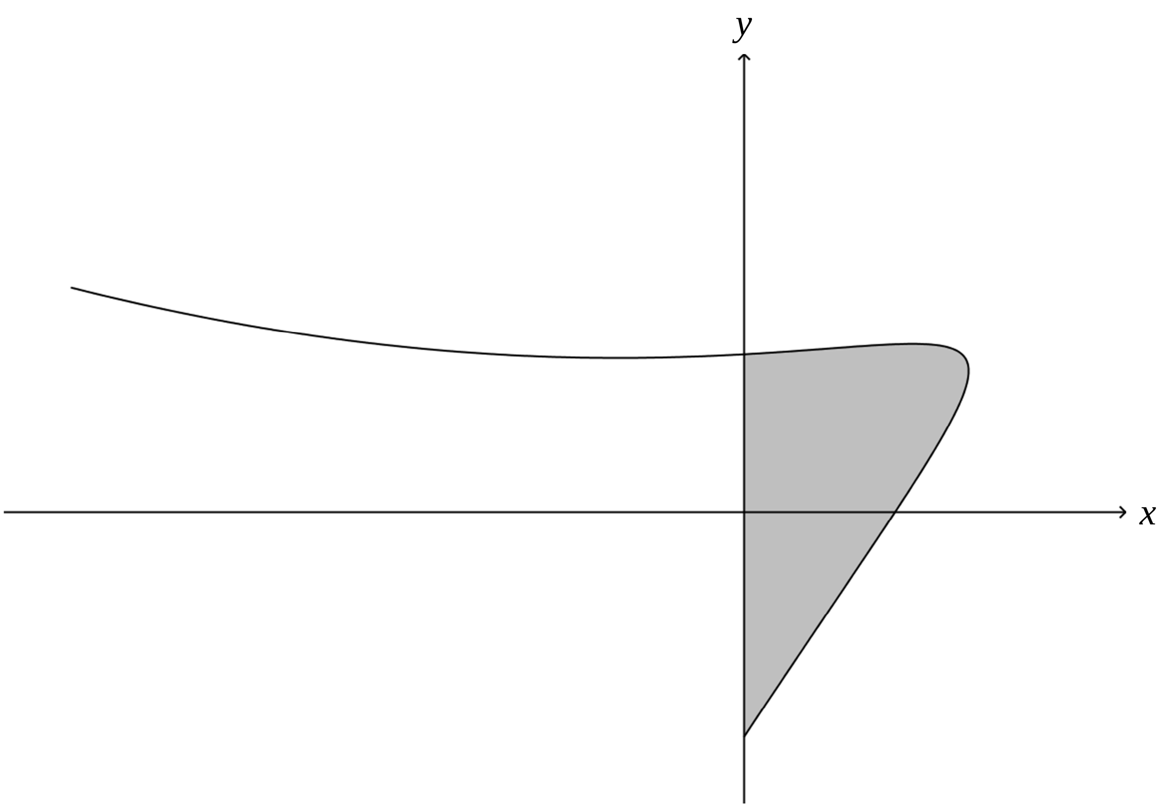
b) Déterminer, en utilisant la méthode de Newton, une approximation du point d'intersection de la courbe et de l'axe des abscisses.
Pour cela, résoudre l'équation $y(t) = 0$ en partant de $t = 0$ et effectuer deux itérations (arrondir t à deux décimales).

c) Déterminer le point à tangente verticale.

d) Déterminer le point à tangente horizontale qui se trouve dans le premier quadrant.

e) On considère la surface fermée délimitée par l'axe des ordonnées et la courbe (voir l'esquisse ci-dessous, surface grisée).
Décrire une méthode qui permet de calculer une bonne approximation de l'aire de cette surface, puis écrire un programme qui réalise ce calcul.

f) Écrire un programme qui détermine les deux points de la courbe les plus éloignés l'un de l'autre (pour $t \in [0;1]$).



Problème 3 (poids 2)

On considère

> Un abri constitué du rectangle $ABCD$ et du rectangle AA_1D_1D. Les cotes des points A et D sont égales à 6 cm et celles de B et C à 9 cm.
>
> Un triangle vertical MM_1N dont la perspective $M'(M_1)'N'$ est déjà donnée. Le point N est situé dans le sol : $N = N_1$

On considère la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l.
La droite h est la ligne d'horizon.

a) Dessiner la perspective de l'abri.

Une source lumineuse ponctuelle est donnée par sa projection L_1 et par sa cote égale à 10 cm. Le segment A_1L_1 est perpendiculaire à l.

b) Dessiner la perspective de l'ombre de l'abri sur le sol et sur le triangle.

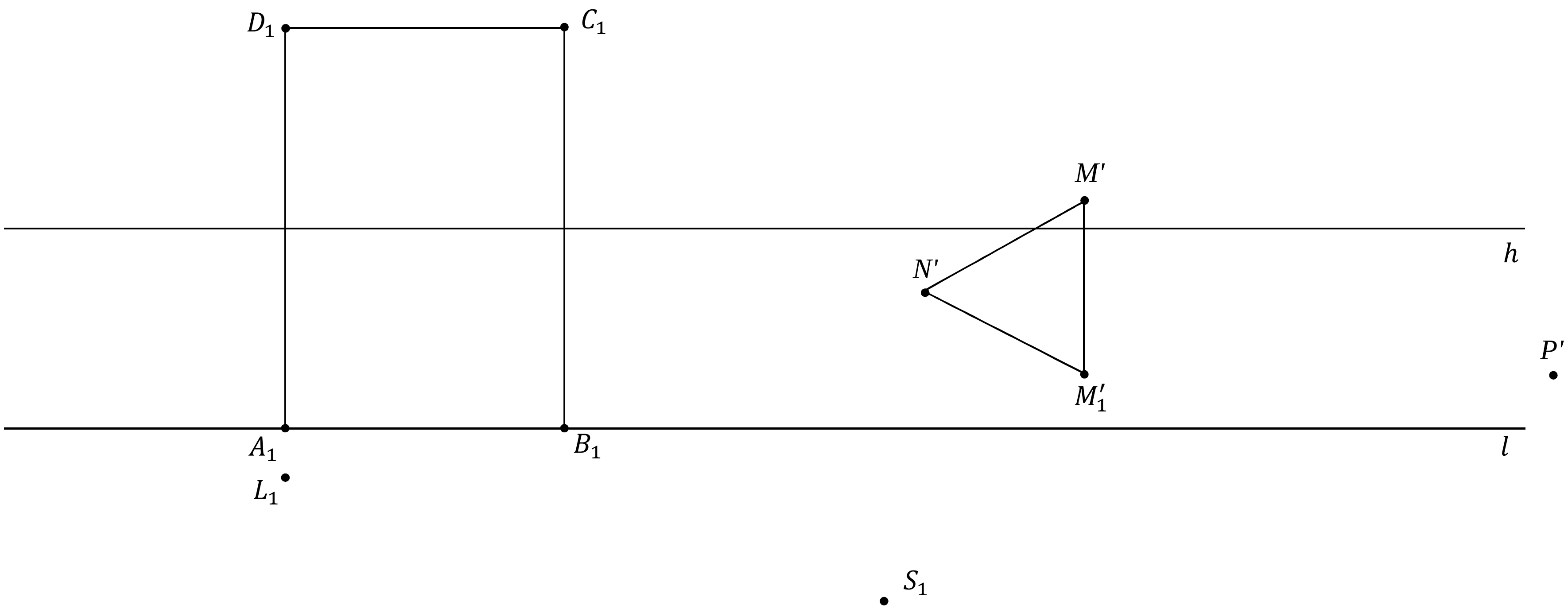
Une deuxième source lumineuse ponctuelle P située sur le sol est donnée par sa perspective $P' = (P_1)'$. Le segment PM_1 est parallèle à l.

c) Dessiner la perspective de l'ombre du triangle sur l'abri.

d) Au moyen d'une construction adéquate, trouver la cote du point M.

Nom et prénom

Classe



Problème 4 (poids 1)

Problème de mathématiques financières, pour lequel on rappelle la formule ci-dessous.

Capitalisation par versements réguliers

$A_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ où A_n est la valeur acquise à la fin de la n-ième année par n versements de montant a effectués au début de chaque année et $r = 1 + t$ ($t =$ taux d'intérêts annuel).

Lors de la naissance d'un enfant, ses parents souhaitent qu'il dispose de 10'000 francs quand il aura 18 ans. On suppose que pendant les 18 prochaines années le taux d'intérêt ne changera pas et sera égal à 2%.

a) Calculer la somme que doivent verser les parents, s'ils décident de faire un versement unique le jour de la naissance de leur enfant.

b) Calculer la somme qu'ils doivent verser chaque année, s'ils décident d'effectuer 18 versements annuels identiques, le premier versement étant effectué le jour de la naissance de leur enfant et le dernier versement le jour de ses 17 ans.

c) Les parents décident de verser chaque année la somme trouvée à la question b), arrondie au franc supérieur, mais n'effectuent pas les 4 derniers versements. De quelle somme l'enfant disposera-t-il quand il aura 18 ans ?

d) Calculer le nombre minimal d'années après lequel l'enfant disposera d'au moins 10'000 francs, si les parents versent chaque année 530 francs (le premier versement étant effectué le jour de la naissance de leur enfant).

e) Calculer la somme que les parents doivent verser chaque mois, s'ils décident d'effectuer 216 versements mensuels identiques ($216 = 18 \cdot 12$) plutôt que des versements annuels. Le premier versement est effectué le jour de la naissance de leur enfant, le deuxième un mois plus tard, et ainsi de suite.

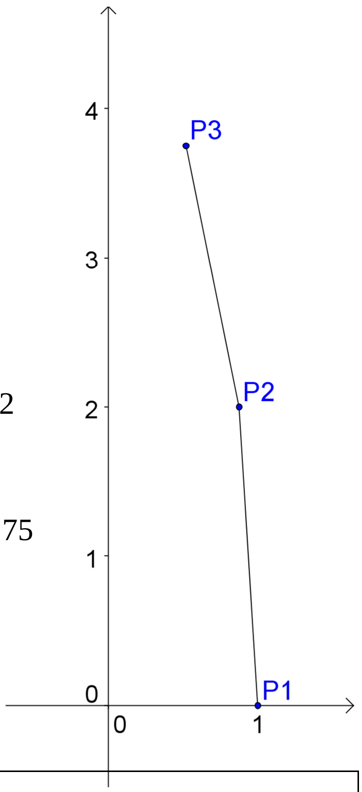
Solution 1

- $x''(t) = -x(t)$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$
- $y''(t) = -y(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$

a)

t	0	0.5	1
x	1	0.875	0.515625
x'	0	-0.5	
x''	-1	-0.875	
tm	0.25	0.75	
x(tm)	1	0.75	
x'(tm)	-0.25	-0.71875	
x''(tm)	-1	-0.75	

donc $x(1) \cong 0.52$



b)

t	0	0.25	0.5	0.75	1
y	0	1	2	2.9375	3.75
y'	4	4	3.75	3.25	
y''	0	-1	-2	-2.9375	

donc $y(1) \cong 3.75$

c) On a trois points : $P_1(1;0)$ $(t=0)$, $P_2(0.875;2)$ $(t=0.5)$ et $P_3(0.52;3.75)$ $(t=1)$

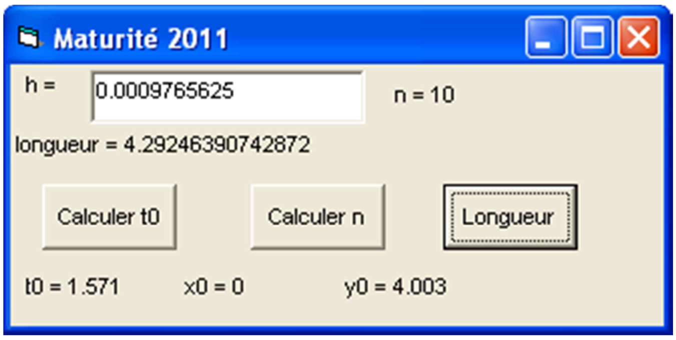
d)

```
Private Sub Command1_Click()
Let h = Text1.Text
Let t = 0
Let x = 1
Let xp = 0
Let xpp = -1
Let y = 0
Let yp = 4
Let ypp = 0
Do
  Let t = t + h
  Let x = x + h * xp
  Let xp = xp + h * xpp
  Let xpp = -x
  Let y = y + h * yp
  Let yp = yp + h * ypp
  Let ypp = -y
Loop Until x <= 0
Let Label5.Caption = "t0 = " & t
Let Label6.Caption = "x0 = " & x
Let Label7.Caption = "y0 = " & y
End Sub
```

e)

```
Private Sub Command2_Click()
Let n = 0
Do
  Let n = n + 1
  Let h = 1 / (2 ^ n)
  Let Text1.Text = h
  Call Command1_Click
Loop Until Abs(x) <= 2 ^ -10
Let Label7.Caption = "n = " & n
End Sub
```

f)




```
Private Sub Command3_Click()
Let h = Text1.Text
Let t = 0
Let x = 1
Let xp = 0
Let xpp = -1
Let y = 0
Let yp = 4
Let ypp = 0
Do
  Let x0 = x
  Let y0 = y
  Let t = t + h
  Let x = x + h * xp
  Let xp = xp + h * xpp
  Let xpp = -x
  Let y = y + h * yp
  Let yp = yp + h * ypp
  Let ypp = -y
  Let dl = Sqr((x - x0) ^ 2 + (y - y0) ^ 2)
  Let longueur = longueur + dl
Loop Until x <= 0
Let Label3.Caption = "longueur = " & longueur
End Sub
```

Solution 2

$c:\begin{cases} x(t) = -9t^2 + 6t \\ y(t) = 8t^3 - 15t^2 + 9t - 1 \end{cases}$ avec $t \in [0;1]$

a) $x = -3t \cdot (3t-2)$, $t = 0 \Rightarrow Iy_1(0;-1)$ et $t = \frac{2}{3} \Rightarrow Iy_2(0;0.704)$

b) $n(t) = t - \frac{8t^3 - 15t^2 + 9t - 1}{24t^2 - 30t + 9} = \frac{16t^3 - 15t^2 + 1}{24t^2 - 30t + 9}$, $n(0) = \frac{1}{9} \cong 0.11$, $n(0.11) \cong 0.14$ et $t = 0.14 \Rightarrow I_x(0.66;-0.01)$ ou plus logiquement $I_x(0.66;0)$

c) $x'(t) = -18t + 6$ et $t = \frac{1}{3} \Rightarrow V(1;0.63)$

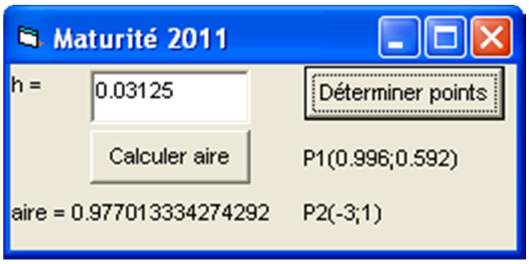
d) $y'(t) = 24t^2 - 30t + 9$ et $t = \frac{1}{2} \Rightarrow H(0.75;0.75)$ ($t = \frac{3}{4} \Rightarrow x = -0.56$ à rejeter)

e) Pout t allant de 0 à $\frac{1}{3} - h$ ($\frac{1}{3}$ est le temps correspondant au point à tangente verticale et h est le pas), on calcule $x_1 = x(t)$ et $y_1 = y(t)$. On cherche ensuite le temps t' pour lequel la courbe passe la deuxième fois par un point d'abscisse x_1, autrement dit on cherche $t' \neq t$ tel que $x(t') = x_1$. Par Viète, on obtient $t' = \frac{2}{3} - t$ et on calcule $y_1' = y(t')$. On refait les mêmes calculs pour le temps $t+h$, donc on calcule encore $x_2 = x(t+h)$, $y_2 = y(t+h)$ et y_2'. On obtient ainsi un trapèze dont les bases verticales sont les segments $P_1(x_1;y_1)P_2(x_1;y_1')$ et $P_3(x_2;y_2)P_4(x_2;y_2')$ et dont la hauteur horizontale vaut $x_2 - x_1$. On additionne les aires de tous les trapèzes pour obtenir une approximation de l'aire cherchée.

```
Private Sub Command1_Click()
Let h = Text1.Text
Let t = 0
Let X2 = 0
Let Y2 = -1
Let y2p = 0.704
Do
  Let X1 = X2
  Let Y1 = Y2
  Let y1p = y2p
  Let t = t + h
  Let X2 = -9 * t ^ 2 + 6 * t
  Let Y2 = 8 * t ^ 3 - 15 * t ^ 2 + 9 * t - 1
  Let tp = 2 / 3 - t
  Let y2p = 8 * tp ^ 3 - 15 * tp ^ 2 + 9 * tp - 1
  Let bm = (y1p - Y1 + y2p - Y2) / 2 ' base moyenne
  Let hauteur = X2 - X1
  Let da = bm * hauteur
  Let aire = aire + da
Loop Until t >= 1 / 3
Let Label7.Caption = "aire = " & aire
End Sub
```

f)

```
Private Sub Command2_Click()
Let h = Text1.Text
For t1 = 0 To 1 - h Step h
  For t2 = t1 + h To 1 Step h
    Let X1 = -9 * t1 ^ 2 + 6 * t1
    Let Y1 = 8 * t1 ^ 3 - 15 * t1 ^ 2 + 9 * t1 - 1
    Let X2 = -9 * t2 ^ 2 + 6 * t2
    Let Y2 = 8 * t2 ^ 3 - 15 * t2 ^ 2 + 9 * t2 - 1
    Let delta = (X2 - X1) ^ 2 + (Y2 - Y1) ^ 2
    If delta > Max Then
      Let Max = delta
      Let x1max = X1
      Let x2max = X2
      Let y1max = Y1
      Let Y2max = Y2
    End If
    Next t2
Next t1
Let Label2.Caption = "P1(" & x1max & ";" & y1max & ")"
Let Label3.Caption = "P2(" & x2max & ";" & Y2max & ")"
End Sub
```



Solution 4

a) $C_n = C_0 \cdot r^n \Rightarrow C_0 = \dfrac{C_n}{r^n} = \dfrac{10000}{(1.02)^{18}} = 7001.60$

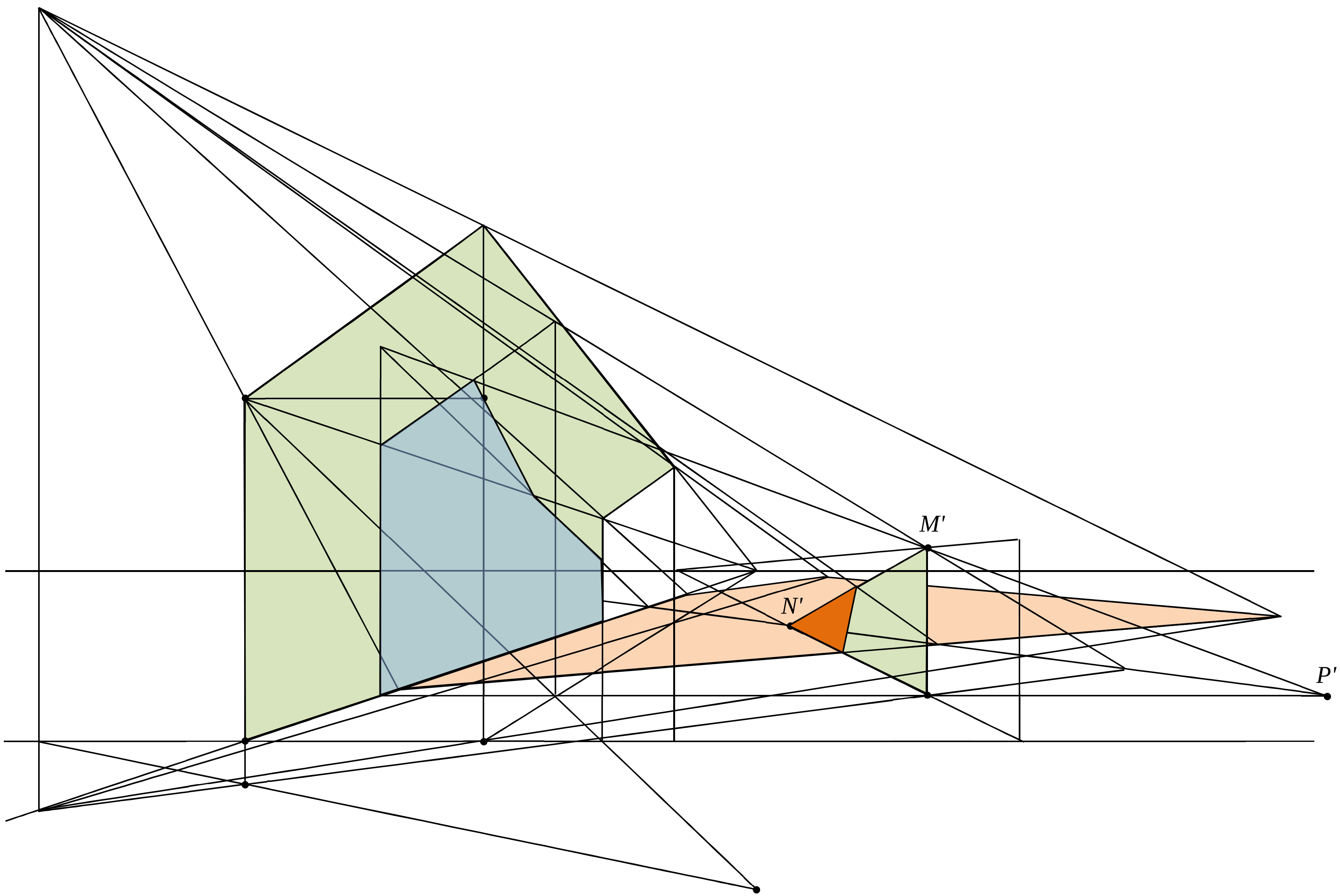
b) $A_n = a \cdot r \cdot \dfrac{r^n - 1}{r-1} \Rightarrow a = \dfrac{A_n \cdot (r-1)}{r \cdot (r^n - 1)}$, donc $a = \dfrac{10000 \cdot 0.02}{1.02 \cdot (1.02^{18} - 1)} = \dfrac{200}{0.4368} = 457.86$

c) $A_{14} = 458 \cdot 1.02 \cdot \dfrac{1.02^{14} - 1}{0.02} = 7462.38$ et $7462.38 \cdot 1.02^4 = 8077.52$

d) $A_n = a \cdot r \cdot \dfrac{r^n - 1}{r-1} \Rightarrow r^n - 1 = \dfrac{A_n \cdot (r-1)}{a \cdot r} \Rightarrow r^n = \dfrac{A_n \cdot (r-1) + a \cdot r}{a \cdot r}$ d'où

$n = \dfrac{\log\left(A_n \cdot (r-1) + ar\right) - \log(a \cdot r)}{\log(r)} = 15.896$ ($a = 530$) donc après 16 ans.

e) $A_n = a \cdot r \cdot \dfrac{r^n - 1}{r-1} \Rightarrow a = \dfrac{A_n \cdot (r-1)}{r \cdot (r^n - 1)}$, avec $r = 1.02^{\frac{1}{12}}$ et $n = 216$ on obtient $a \cong 38.50$.


M′
N′
P′