CEJEF
DIVISION LYCÉENNE
LYCÉE CANTONAL

2, place Blarer-de-Wartensee
Case postale 152
CH-2900 Porrentruy

t +41 32 420 36 80
f +41 32 420 36 81
lycee.cantonal@jura.ch

Session 2012

EXAMEN DE MATHÉMATIQUES - Discipline fondamentale

- temps à disposition : 4 heures
- note maximale (6) pour 4 problèmes justes
- extrait des "Formulaires et Tables" à disposition
- machine à calculer (non graphique et non programmable) autorisée

---

Problème 1

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + 18x}{2x^2 + 4}$.

1. Étudier la fonction f (avec la dérivée seconde).
   Durant l'étude, vous montrerez que la dérivée première est $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 6)^2}{2(x^2 + 2)^2}$.
2. Calculer la pente de la tangente t à l'origine O du repère.
3. Représenter graphiquement la fonction f avec la tangente t (unité : 1 carré).

Problème 2

Quatre amis pêcheurs ont mélangé leurs bottes avant d'aller se coucher. René se lève le premier et prend deux bottes au hasard dans l'obscurité pour ne pas réveiller ses camarades, puis il sort de la chambre.

1. (a) Calculer la probabilité des événements suivants.
   - A : Ces deux bottes sont les siennes.
   - B : Il a pris une botte gauche et une botte droite.
   - C : Il a pris deux bottes droites.
   - D : Une botte appartient à René et l'autre pas.
   - E : Ces deux bottes appartiennent à des pêcheurs différents.

   (b) Sachant que René a pris une botte gauche et une botte droite, calculer la probabilité que ces bottes soient les siennes.
2. Chaque jour, le même scénario se reproduit : les bottes sont mélangées et René prend deux bottes au hasard dans l'obscurité.
   (a) Calculer la probabilité que, durant les 10 jours à venir, René prenne au moins une fois ses deux bottes.
   (b) Combien de jours devraient passer pour que René soit sûr avec une probabilité de plus de 95% de prendre au moins une fois ses deux bottes ?
3. Suite aux remontrances de ses amis, René procède désormais autrement : il prend d'abord quatre bottes, puis sort de la chambre. Dans le couloir, à la lumière, il regarde ce qu'il a pris, puis il chausse la ou les bottes qui lui appartiennent. S'il n'a pas ses deux bottes au pieds, il retourne dans la chambre et en prend encore deux sur les quatre restantes, puis il retourne dans le couloir.
   Calculer la probabilité qu'après son petit manège il ait trouvé ses deux bottes.

(suite au verso)

Problème 3

Dans un repère orthonormé, on donne les trois points $A(-10;32;-2)$, $B(6;-16;10)$ et $C(-2;34;4)$.

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en C.
2. Déterminer l'équation cartésienne du plan π contenant les points A, B et C.
3. Calculer l'aire du triangle ABC.
4. Calculer l'angle β $(=\widehat{ABC})$ du triangle ABC.
5. Déterminer le centre et le rayon du cercle c, contenu dans le plan π, passant par les points A et C, et dont le centre appartient à la droite (AB).

On donne encore la droite $d : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & -4 & + & 4k \\ y & = & 1 & - & 2k \\ z & = & -10 & + & 3k \end{array}\right.$ et le point $D(2;3;-1)$.

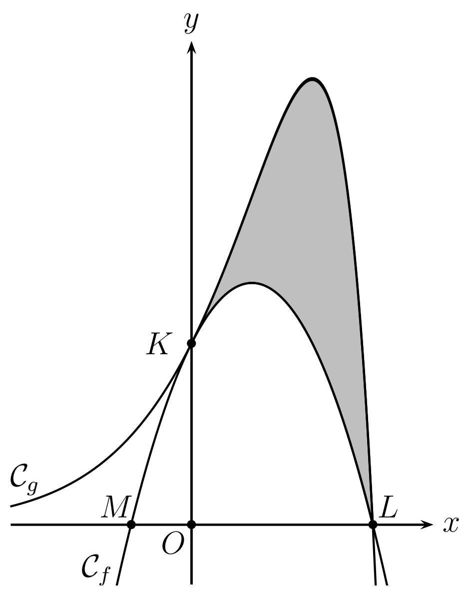
6. Montrer que le plan π et la droite d sont strictement parallèles.
7. Calculer la distance séparant la droite d et le plan π.
8. Déterminer l'équation cartésienne d'une sphère tangente au plan π, passant par le point D et dont le centre appartient à la droite d.

Problème 4

Soient les fonctions f et g définies par

$$f(x) = -x^2 + 2x + 3 \qquad \text{et} \qquad g(x) = (3-x)e^x$$

dont les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, relativement à un repère orthonormé, se trouvent ci-contre.



1. (a) Donner les coordonnées des points d'intersection K, L et M de $\mathcal{C}_f$ avec les axes.

   (b) Vérifier que L est également un point de $\mathcal{C}_g$.

   (c) Montrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont tangentes en K.

2. Calculer l'angle aigu d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ au point L.

3. (a) Quelle est la pente de la droite (KL) ?

   (b) Calculer la valeur de x pour laquelle la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x est parallèle à la droite (KL).

4. (a) Calculer $\int (3-x)e^x \, dx$.

   (b) Calculer l'aire du domaine grisé.

5. On appelle P un point de la courbe $\mathcal{C}_g$ situé dans le premier quadrant ($x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$) et I sa projection orthogonale sur l'axe Ox.

   Quelles sont les coordonnées du point P pour lesquelles l'aire du triangle POI est maximale ?