Problème 1 (poids 3)

a) Résoudre l'équation différentielle suivante : $xy' + y + \dfrac{4}{x} = 0$.

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2 - 4\ln(x)}{x}$.

b) Déterminer le domaine de définition, le(s) zéro(s), les asymptotes et le(s) point(s) à tangente horizontale de f.
Dessiner le graphe de f dans un repère orthonormé (unité : 4 carreaux).

c) Calculer l'angle formé par l'axe des x et le graphe de f.

d) On considère la surface délimitée par le graphe de f, l'axe des x et les droites verticales $x = 1$ et $x = k > 1$. Calculer le nombre k de sorte que l'aire de cette surface vaille 1.

e) Déterminer le point du graphe de f en lequel la tangente passe par l'origine.
Donner l'équation de cette tangente.

Problème 2 (poids 3)

Un nombre non nul k étant fixé, on considère l'application linéaire f qui est décrite dans la base standard par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & -1 & -k \\ 0 & -k & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Vérifier que $\lambda = 1$ est une valeur propre de f en trouvant un vecteur propre associé.

b) Trouver les deux autres valeurs propres de f (en fonction de k) en sachant que leur somme est nulle et que leur produit est le déterminant de M.

c) Trouver le nombre k pour que f admette le vecteur propre $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Pour la suite, on prend $k = 2$. On considère donc l'application linéaire f qui est décrite dans la base standard $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3})$ par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) On considère $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u_1}$. Exprimer dans la base standard les vecteurs $\overrightarrow{b} = f(\overrightarrow{a})$ et $\overrightarrow{c} = f(\overrightarrow{b})$. Ecrire la matrice N associée à f dans la base $(\overrightarrow{a}; \overrightarrow{b}; \overrightarrow{c})$.

e) Déterminer l'image du plan $\pi : 2x + 3y - z = 0$ par l'application f.

f) Décrire l'effet de $f \circ f$ sur tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ orthogonal à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Problème 3 (poids 2)

Pour $m \in \mathbb{C}$, on considère la fonction complexe f définie par $f(z) = m + \dfrac{8+6i}{z-3}$.

a) Déterminer m sachant que $f(-4+i) = 2 - i$.

Pour la suite du problème, on considère $m = 3$, donc $f(z) = 3 + \dfrac{8+6i}{z-3}$.

b) Trouver l'expression de la fonction réciproque f^{-1}.

c) Calculer les points fixes de la fonction f.

d) Pour $z = x + yi$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, montrer que l'on obtient $f(z) = u + vi$ avec

$$u = 3 + \frac{8x+6y-24}{(x-3)^2+y^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{6x-8y-18}{(x-3)^2+y^2}$$

e) Déterminer l'image de l'axe réel privé du point $(3;0)$.

f) Dans le plan de Gauss, où se situent les nombres z dont l'image $f(z)$ a une partie réelle égale à 2 ?

Problème 4 (poids 2)

Première partie

Pour calculer la probabilité que Didier Cuche termine sur le podium lors d'une course, un spécialiste a trouvé la formule

$$P = 1 - \frac{1}{f}$$

où f est un coefficient qui reflète la forme de Didier pendant la course :

$f = 2$ si la forme est moyenne,	$f = 4$ si la forme est bonne,
$f = 5$ si la forme est excellente,	il n'y a pas d'autres formes possibles.

On suppose que la forme de Didier pendant une course est aléatoire et indépendante de celles des autres courses. La probabilité que Didier soit en bonne forme est de $\frac{3}{7}$, les deux autres cas sont équiprobables.

a) Calculer la probabilité que Didier ne termine pas sur le podium lors d'une course.

b) Lors d'une course, Didier a terminé sur le podium. Quelle est la probabilité que sa forme ait été excellente ?

c) Si lors de cinq courses la forme de Didier est bonne, calculer la probabilité qu'il termine. . .

   c1) exactement trois fois sur le podium,

   c2) au moins deux fois sur le podium.

Deuxième partie

Le fan's club de Didier organise un événement au cours duquel les participants ont la possibilité de faire une course contre Didier. La probabilité que Didier remporte une course contre n'importe quel participant est de 90%. L'événement se termine lorsque Didier perd une course. Appelons X le nombre de courses effectuées par Didier.

d) Calculer $P(X = 2)$, $P(X = 3)$ et $P(X = n)$.

e) Quelle est la probabilité que Didier gagne les 8 premières courses ?

f) Quelle est la probabilité que Didier fasse moins de 12 courses ?

g) Déterminer le plus petit nombre k de courses de sorte que la probabilité que Didier fasse moins de k courses soit supérieur à 98%.

Problème 1

a) $y' = -\frac{1}{x}y - \frac{4}{x^2}$. $\quad a(x) = -\frac{1}{x}$, donc $A(x) = -\ln(x)$ et $u = e^{A(x)} = \frac{1}{x}$.

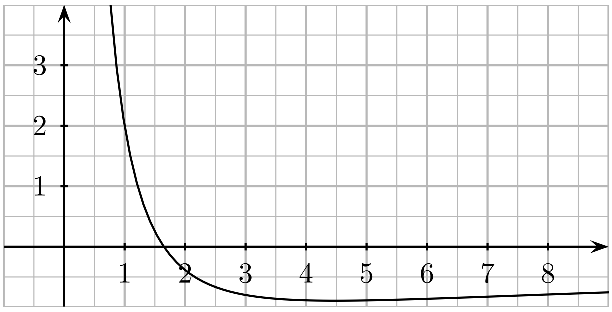
$$v = \int \frac{-4/x^2}{1/x}dx = -4\int \frac{1}{x}dx = -4\ln|x| + C. \text{ Au total : } y = uv = \frac{C - 4\ln|x|}{x}.$$

b) $D_f =]0;\infty]$, $\quad Z_f = \{\sqrt{e}\}$

A.V. $x = 0$, $\quad$ A.H. $y = 0$

$f'(x) = \dfrac{4\ln(x) - 6}{x^2}$

p.t.h. en $H(e^{3/2}; -4e^{-3/2})$
(minimum d'après les asymptotes).



c) Angle pour $x = \sqrt{e}$: $|\tan^{-1}(f'(\sqrt{e}))| = |\tan^{-1}(-4/e)| \cong 55.8°$

d) En posant $x = e^t$, donc $dx = e^t dt$, on obtient (primitive à constante additive près)

$$F(x) = \int \frac{2 - 4\ln(x)}{x}dx = \int \frac{2 - 4t}{e^t}e^t dt = \int (2 - 4t)dt = 2t - 2t^2 = 2\ln(x)(1 - \ln(x))$$

Comme $[F(x)]_1^{\sqrt{e}} = 0.5$, on doit trouver k de sorte que $-[F(x)]_{\sqrt{e}}^{k} = 0.5$, c'est-à-dire $2\ln(k)(1 - \ln(k)) - 0.5 = -0.5$, $\quad 2\ln(k)(1 - \ln(k)) = 0$, donc $k = 1$ (exclu) ou $k = e$.

e) $\dfrac{f(x)}{x} = f'(x)$, $\quad \dfrac{2 - 4\ln(x)}{x^2} = \dfrac{4\ln(x) - 6}{x^2}$, $\quad 2 - 4\ln(x) = 4\ln(x) - 6$, $\quad 8 = 8\ln(x)$, $\ln(x) = 1$, $\quad x = e$. Le point de contact est $P(e, -2/e)$ et la tangente en ce point admet la pente $f'(e) = -2e^{-2}$. Cette tangente admet l'équation $y = \dfrac{-2}{e^2}x$.

Problème 2

a) Tout multiple non nul de $\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ convient.

b) $\det(M) = -(1+2k^2) \qquad \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{1+2k^2}$.

c) $M\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl|} 3k-2 & = & -2\lambda \\ -4k-3 & = & 3\lambda \\ (-3k+2 & = & 2\lambda) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl|} 9k-6 & = & -6\lambda \\ -8k-6 & = & 6\lambda \end{array}\right. \Longrightarrow k = 12$

d) $\overrightarrow{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{c} = \begin{pmatrix}5\\0\\-4\end{pmatrix}$. On a $f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}$, $f(\overrightarrow{b}) = \overrightarrow{c}$ et

$f(\overrightarrow{c}) = \begin{pmatrix}5\\18\\-4\end{pmatrix} = -9\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+9\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5\\0\\-4\end{pmatrix} = -9\overrightarrow{a}+9\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$, donc $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -9 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) Les points O, $A(1;0;2)$ et $B(0;1;3)$ (dans π) sont envoyés sur O, $A'(1;-2;2)$ et $B'(2;-7;1)$. Le plan qui contient ces trois points est $\pi' : 4x+y-z=0$.

f) $M^2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 0 & 9 & 0 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ envoie $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ sur $\begin{pmatrix}5x-4z\\9y\\-4x+5z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9x\\9y\\9z\end{pmatrix}$ si $x+z=0$.
Ainsi $f \circ f$ agit sur les vecteurs considérés comme une homothétie de facteur 9.

Problème 3

a) $f(-4+i) = 2-i$, $\quad (-7+i)(2-i) = (-7+i)m+8+6i$, $\quad -13+9i = (-7+i)m+8+6i$, $-21+3i = (-7+i)m$, $\quad 3(-7+3i) = (-7+i)m$, $\quad m = 3$

b) $f(z) = w$, $\quad \dfrac{8+6i}{z-3} = w-3$, $\quad \dfrac{z-3}{8+6i} = \dfrac{1}{w-3}$, $\quad z-3 = \dfrac{8+6i}{w-3}$, $\quad z = 3+\dfrac{8+6i}{w-3}$,
donc $f^{-1}(z) = 3+\dfrac{8+6i}{z-3} = f(z)$

c) $f(z) = z \Longleftrightarrow (z-3)^2 = 8+6i$ donc $z-3 = \pm(a+bi)$ avec $a^2+b^2 = 10$, $a^2-b^2 = 8$ $2ab = 6$. On en déduit $2a^2 = 18$, $a = 9$, $a = 3$ (choix : $a > 0$) et $b = 1$. On a ainsi $z-3 = \pm(3+i)$, donc $z \in \{6+i, -i\}$.

d) $f(x+yi) = 3+\dfrac{8+6i}{(x-3)+yi}\cdot\dfrac{(x-3)-yi}{(x-3)-yi}$

$$= 3+\frac{8(x-3)+6y+i(-8y+6(x-3))}{(x-3)^2+y^2} = 3+\frac{8x+6y-24}{(x-3)^2+y^2}+i\frac{6x-8y-18}{(x-3)^2+y^2}$$

e) $y = 0 \Longleftrightarrow u = 3+\dfrac{8}{x-3}$ et $v = \dfrac{6}{x-3}$, donc $6u = 18+8v$. L'ensemble cherché est la droite d'équation $3u-4v-9=0$ privée du point $(3;0)$ (car u peut prendre n'importe quelle valeur réelle sauf 3).

f) $u = 2 \Longleftrightarrow \big((x;y) \neq (3;0)$ et $8x+6y-24 = -(x-3)^2-y^2\big)$.
On en déduit $x^2+2x+9+y^2+6y-24 = 0$, $(x+1)^2+(y+3)^2 = 25$. L'ensemble cherché est le cercle centré en $(-1;-3)$ et de rayon 5, privé du point $(3;0)$.

Problème 4

Traduction de la donnée (M,B,E : forme de Didier, P : podium)

$$\mathbb{P}(P|M) = \frac{1}{2}, \quad \mathbb{P}(P|B) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(P|E) = \frac{4}{5}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{3}{7}, \quad \mathbb{P}(M) = \mathbb{P}(E) = \frac{2}{7}$$

a) $\mathbb{P}(\overline{P}) = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{5} = \frac{43}{140} \cong 0.307$

b) $\mathbb{P}(E|P) = \frac{\mathbb{P}(E)\mathbb{P}(P|E)}{\mathbb{P}(P)} = \frac{8/35}{97/140} = \frac{32}{97} \cong 0.330$

c1) $\binom{5}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 10\frac{27}{1024} = \frac{135}{512} \cong 0.264$

c2) $1 - \mathbb{P}(0 \text{ ou } 1 \text{ podium}) = 1 - \left(\left(\frac{1}{4}\right)^5 + 5\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 1 - \frac{16}{1024} = \frac{63}{64} \cong 0.984$

d) $\mathbb{P}(X = 2) = 0.09, \quad \mathbb{P}(X = 3) = 0.081, \quad \mathbb{P}(X = n) = (0.9)^{n-1} \cdot (0.1)$

e) $(0.9)^8 \cong 0.430$

f) $1 - \mathbb{P}(X \geqslant 12) = 1 - (0.9)^{11}$ (variante avec une somme géométrique)

g) $1 - (0.9)^{k-1} > 0.98, \quad (0.9)^{k-1} < 0.02, \quad k - 1 > \frac{\ln(0.02)}{\ln(0.9)} \cong 37.13, \quad k = 39$