CANTON DU VALAIS
KANTON WALLIS

Département de l'éducation, de la culture et du sport
Service de l'enseignement
Lycée - Collège des Creusets, Sion

Departement für Erziehung, Kultur und Sport
Dienststelle für Unterrichtswesen
Kollegium Creusets, Sitten

Lycée Collège Creusets

Examens de maturité 2012

Mathématiques fortes DF	Version A

Problème 1 (20 points)

1. Étudier et représenter graphiquement (unité 1 cm) la fonction

$$f\colon x \mapsto 2\sin(x)\big(1+\cos(x)\big)$$

2. Calculer la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\pi]$.

Problème 2 (16 points)

On considère les séries de termes $u_k = \dfrac{1}{k(k+2)}$ et $w_k = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k(k+2)}$ pour $k \geq 1$.

1. Utiliser le critère de comparaison pour démontrer que la série de terme u_k converge. En déduire la convergence de la série de terme w_k.
2. Décomposer le terme u_k en somme de fractions simples de première espèce. Écrire ensuite la n-ième somme partielle de la série de terme u_k et calculer la somme de cette série.
3. Trouver la valeur exacte de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,dx$.
4. Écrire l'intégrale I comme somme d'une série à partir du développement

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + \ldots \quad \text{pour} \quad -1 < x \leq 1$$

En déduire la somme de la série de terme w_k.

5. Calculer une valeur approximative de l'intégrale $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx$ à 10^{-2} près.

Problème 3 (16 points)

Dans l'espace affine euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère les deux points $P(2\,;-1\,;-2)$ et $Q(0\,;1\,;-14)$ et la droite d d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 13+k \\ y = 12-k \\ z = 2+k \end{cases}$.

1. Vérifier que les droites d et (PQ) sont gauches et déterminer la perpendiculaire commune à ces deux droites.
2. Écrire l'équation de la sphère dont $[PQ]$ est un diamètre. Montrer que le point $T(-2\,;2\,;-3)$ appartient à cette sphère et déterminer l'équation cartésienne du plan τ tangent à la sphère en T.
3. Vérifier que les points $A(3\,;6\,;5)$, $B(5\,;-10\,;1)$ et $C(-3\,;4\,;-9)$ sont à égale distance du point P. On considère alors le cône circulaire droit de sommet P et passant par A, B et C. Déterminer des équations paramétriques de l'axe de ce cône.

Problème 4 (12 points)

On considère la fonction complexe f définie par

$$f(z) = \left(1 - \sqrt{3}\,i\right) z - 4\sqrt{3}$$

et on note T la transformation du plan de Gauss qui lui est associée.

1. Résoudre l'équation $f(z) = z$.
2. Trouver le centre, le rapport et l'angle de la similitude directe T.
3. Caractériser géométriquement la transformation réciproque de T. En déduire et simplifier l'expression ${}^{r}f(z)$ de la fonction réciproque de f.
4. Quel est l'ensemble des points d'affixe z vérifiant l'équation $|f(z)| = 4$?
Indication : donner une interprétation géométrique de cette équation.

FIN