Tous les problèmes ont le même poids pour le calcul de la note.

Problème 1

Un point mobile P se déplace en suivant une courbe paramétrique c. Les coordonnées x et y du point sont exprimées en fonction du temps t,

$$c: \begin{cases} x = (t+1)\cdot\sin(2\pi\cdot t) \\ y = \cos(2\pi\cdot t) \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0;1]$$

a) Calculer la position et la vitesse de P aux temps $t_0 = 0, t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{1}{2}, t_3 = \frac{3}{4}$ et $t_4 = 1$.

b) Déduire des calculs précédents que la courbe c est fermée et sans point anguleux.

c) En employant la méthode de la bissection, déterminer un intervalle de temps de longueur $\frac{1}{16}$ et contenant une valeur de t pour laquelle le vecteur vitesse est vertical.

d) Dessiner la trajectoire du point P dans un repère orthonormé, en prenant une unité égale à 4 carreaux.

On aimerait approcher au mieux la courbe, au sens des moindres carrés, par une ellipse particulière e donnée par ses équations paramétriques,

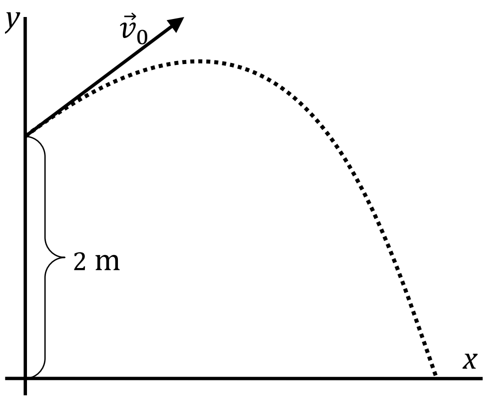
$$e: \begin{cases} x = a\cdot\sin(2\pi\cdot t) \\ y = \cos(2\pi\cdot t) \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0;1]$$

où a est une constante positive.

e) En prenant les cinq valeurs de t de la question a), pour la courbe et l'ellipse, on obtient des points qui ont la même ordonnée. Déterminer la valeur de a qui minimise la somme des carrés des cinq distances horizontales entre la courbe et l'ellipse.

f) Écrire un programme qui détermine la valeur de a pour laquelle l'ellipse approche au mieux selon les moindres carrés (au même sens qu'à la question précédente) les 128 points de la courbe c correspondant aux temps $t = 0, t = \frac{1}{128}, t = \frac{2}{128}, \dots, t = \frac{127}{128}$.

Problème 2



On lance un projectile de masse m = 4 kg d'une hauteur de 2 mètres avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = \binom{v_{x0}}{v_{y0}}$.

Si l'on néglige les frottements le projectile n'est soumis qu'à la force de gravité et les équations différentielles de la trajectoire s'écrivent :

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = -g \end{cases}$$

On pose $g = 10\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

a) En intégrant, résoudre les deux équations différentielles :

$x''(t) = 0$ avec les conditions initiales $x'(0) = v_{x0}$ et $x(0) = 0$

et

$y''(t) = -10$ avec les conditions initiales $y'(0) = v_{y0}$ et $y(0) = 2$,

puis, en posant $\vec{v}_0 = \binom{10}{10}$, trouver les équations paramétriques décrivant la trajectoire du projectile.

Calculer la portée du projectile (valeur de x correspondant au temps t pour lequel $y = 0$).

Calculer la hauteur maximale du projectile.

En supposant que le projectile est freiné par un frottement laminaire (proportionnel à la vitesse), les équations différentielles s'écrivent

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{k}{m}\, x'(t) \\ y''(t) = -g - \frac{k}{m}\, y'(t) \end{cases}$$

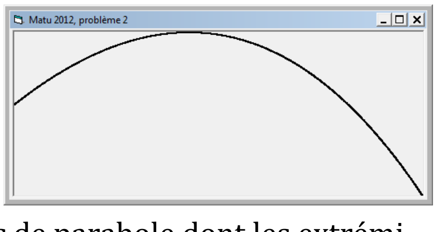
Pour cet exercice, on posera k = 1, donc $\frac{k}{m} = \frac{1}{4}$ et $g = 10$, les équations deviennent alors

$$\begin{cases} x''(t) = -\frac{1}{4} x'(t) \\ y''(t) = -10 - \frac{1}{4} y'(t) \end{cases}$$

b) Estimer les valeurs de $x(1)$ et de $y(1)$ en utilisant la méthode d'Euler pour chacune des deux équations ci-dessus, avec un pas $h = \frac{1}{2}$ et les mêmes conditions initiales qu'au point a).

c) On suppose que la vitesse initiale est $\vec{v}_0 = 10\binom{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$. Écrire un programme qui, en utilisant la méthode de Runge avec un pas $h = \frac{1}{1024}$, estime la valeur de α pour laquelle la portée du projectile est maximale, et affiche, sur une étiquette « Label1 », cette portée maximale ainsi que la hauteur maximale atteinte lors de ce lancer.

d) Compléter le programme pour qu'il dessine la trajectoire à portée maximale obtenue par la méthode de Runge dans une zone d'image « Picture1 » de 500 sur 200 pixels. La trajectoire dessinée doit remplir l'entier de la zone d'image comme illustré ci-contre.



e) Cette trajectoire ressemble à une parabole. On considère l'arc de parabole dont les extrémités sont celles de la trajectoire de d). La pente de l'arc de parabole au départ est la même que celle au départ de la trajectoire de d). Compléter le programme pour qu'il dessine cet arc dans la même zone d'image « Picture1 ».

Problème 3

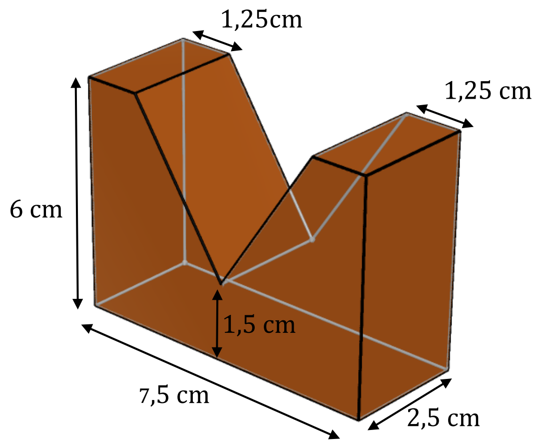
La meilleure moyenne de Maturité en Mathématique est récompensée par une médaille en chocolat en forme de **M** stylisé dont les dimensions sont données ci-dessous.

a) Construire, sur la page suivante, la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l de cette médaille posée sur le sol. La droite h est la ligne d'horizon.

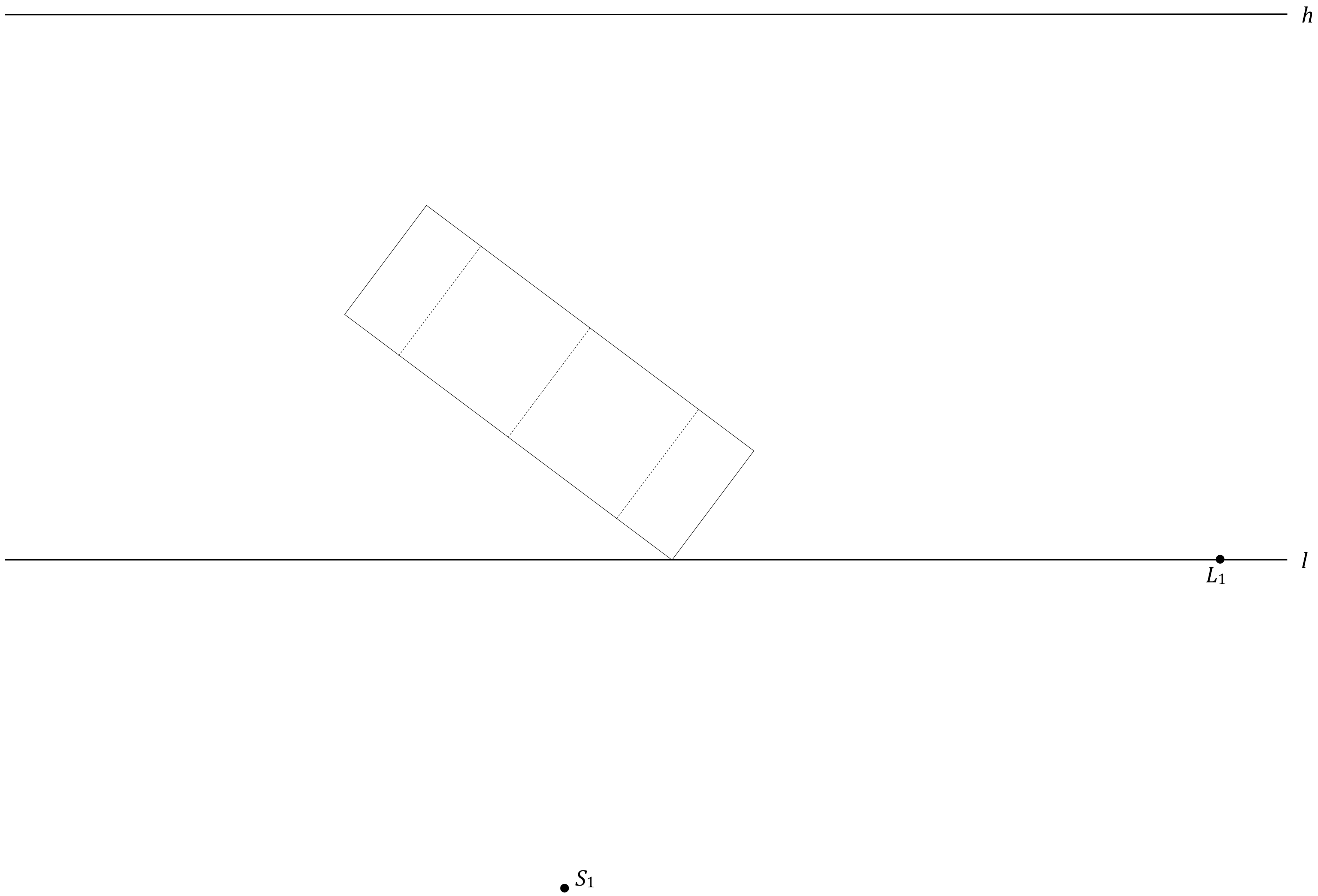
Une lampe, placée à une hauteur de 13 cm et donnée par sa projection L_1 sur le sol, éclaire cette scène.

b) Construire, en perspective, l'ombre de la médaille sur le sol.

c) Colorier en bleu la partie éclairée visible de la médaille.



Nom :	Classe :



Solution 1

a) On a $x'(t) = 2\pi \cdot (t+1) \cdot \cos(2\pi \cdot t) + \sin(2\pi \cdot t)$ et $y'(t) = -2\pi \cdot \sin(2\pi \cdot t)$, d'où

$t = 0 \implies P_0(0;1)$ et $\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$

$t = \frac{1}{4} \implies P_1\left(\frac{5}{4};0\right)$ et $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2\pi \end{pmatrix}$

$t = \frac{1}{2} \implies P_2(0;-1)$ et $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -3\pi \\ 0 \end{pmatrix}$

$t = \frac{3}{4} \implies P_3\left(-\frac{7}{4};0\right)$ et $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2\pi \end{pmatrix}$

$t = 1 \implies P_4(0;1)$ et $\vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 4\pi \\ 0 \end{pmatrix}$.

b) $P_0 = P_4$ et $\vec{v}_0 \,//\, \vec{v}_4$.

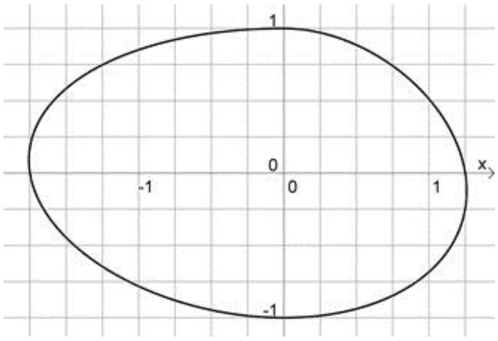
c) On doit résoudre $x'(t) = 0$

$x'\left(\frac{1}{4}\right) = 1,\ x'\left(\frac{1}{2}\right) = -3\pi,$

$x'\left(\frac{3}{8}\right) = -5{,}40\ ,\ x'\left(\frac{5}{16}\right) = -2{,}23\ ,$

$t \in \left[\frac{4}{16};\frac{5}{16}\right]$.

d) Dessin.



e) Il faut minimiser $d(a) = \left(a - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(-a + \frac{7}{4}\right)^2$.

$d'(a) = 2a - \frac{5}{2} + 2a - \frac{7}{2}$, $d'(a) = 0 \implies a = \frac{3}{2}$

f)
```
Private Sub Command1_Click()
  Let pi = 4 * Atn(1)
  Let dmin = 1000
  For a = 1 To 2 Step 1 / 128
    Let d = 0
    For t = 0 To 127 / 128 Step 1 / 128
      Let xc = (t + 1) * Sin(2 * pi * t)
      Let xe = a * Sin(2 * pi * t)
      Let d = d + (xe - xc) ^ 2
    Next t
    If d < dmin Then
      Let sol = a
      Let dmin = d
    End If
  Next a
  Let Label1.Caption = "a = " & sol
End Sub
```

Remarque : on obtient $a = 1{,}5$.

Solution 2

a) $x'(t) = v_{x0} = 10,$

$x(t) = 10t$

$y'(t) = -10t + v_{y0} = -10t + 10$

$y(t) = -5t^2 + 10t + 2$

$y(t) = 0 \implies t \cong 2{,}18 \implies x \cong 21{,}8$

$y'(\mathrm{t}) = 0 \implies t = 1$

$\implies y\,max = 7$

b)

t	x	x'	y	y'
0	0	10	2	10
0,5	5	8,75	7	3,75
1	9,375		8,875	

c – d - e)

```
Private Sub Command1_Click()
Let pi = 4 * Atn(1)
For a = 0 To pi / 2 Step 0.01
  Let x = 0: xp = 10 * Cos(a)
  Let y = 2: yp = 10 * Sin(a)
  Let t = 0: h = 1 / 1024
  Do
    Let t = t + h
    Let xm = x + h / 2 * xp
    Let xpm = xp + h / 2 * (-xp / 4)
    Let x = x + h * xpm
    Let xp = xp + h * (-xpm / 4)
    Let ym = y + h / 2 * yp
    Let ypm = yp + h / 2 * (-10 - yp / 4)
    Let y = y + h * ypm
    Let yp = yp + h * (-10 - ypm / 4)
    If y > ymax Then
      Let ymax = y
    End If
  Loop Until y <= 0
  If x > xmax Then
    Let xmax = x
    Let amax = a
    Let ymax2 = ymax
  End If
Next a
Let Label1.Caption = "xmax=" &
      Format(xmax, "0.00") & "  ymax=" &
      Format(ymax2, "0.00")
```

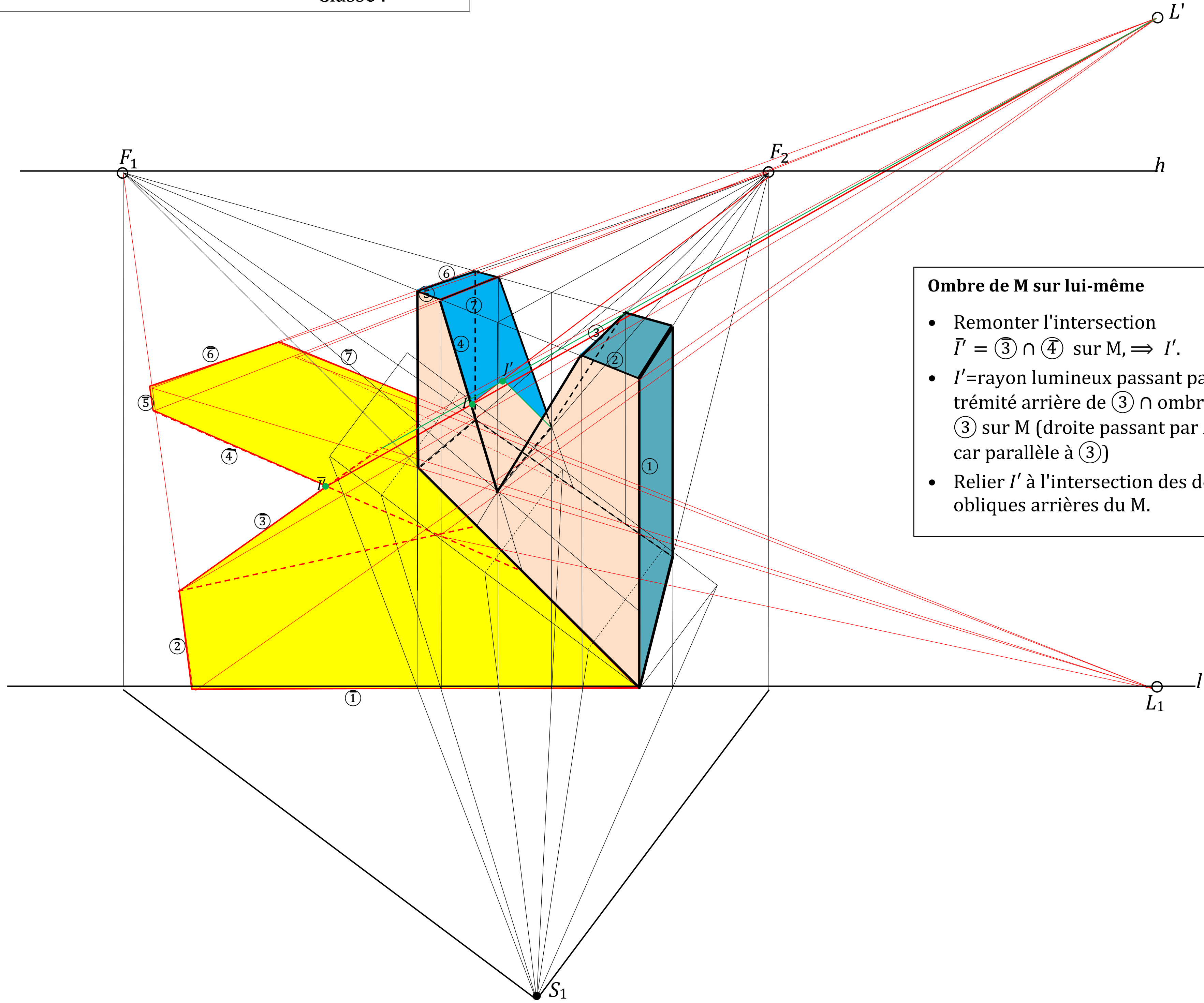
```
' dessin
Let a = amax
 1
 Picture1.PSet (500 / xmax * x,
                200 - 200 / ymax2 * y)
Loop Until y <= 0

' parabole
Let a = (-2 - xmax * Tan(amax)) /
                     xmax ^ 2
Let b = Tan(amax)
Let c = 2
For x = 0 To xmax Step 1 / 1024
  Let y = a * x ^ 2 + b * x + c
  Picture1.PSet (500 / xmax * x,
     200 - 200 / ymax * y), RGB(0, 0, 255)
Next x
End Sub
```

Applications des mathématiques
Examen de maturité 2010

Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

Nom : Classe :



Ombre de M sur lui-même

- Remonter l'intersection $\bar{I}' = \bar{3} \cap \bar{4}$ sur M, $\Longrightarrow$ I'.
- I'=rayon lumineux passant par l'extrémité arrière de 3 $\cap$ ombre de 3 sur M (droite passant par I' et F_2 car parallèle à 3)
- Relier I' à l'intersection des deux obliques arrières du M.