CANTON DU VALAIS
KANTON WALLIS

Département de l'éducation, de la culture et du sport
Service de l'enseignement
Lycée - Collège des Creusets, Sion

Departement für Erziehung, Kultur und Sport
Dienststelle für Unterrichtswesen
Kollegium Creusets, Sitten

Lycée Collège Creusets

Examens de maturité 2013

Mathématiques Fortes DF	Version B

Exercice 1

Soit la fonction donnée par $f(x) = (1 + \ln(x)) \cdot (3 - \ln(x))$

1. Faire l'étude complète de la fonction f et construire sa représentation graphique.
2. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, l'axe O_x et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e^2$.
   En déduire la valeur moyenne de f sur $[1\,; e^2]$.
3. Soit $g(x) = \ln(x)$. En quelle valeur de l'intervalle $[1\,; 10]$ la distance verticale entre les représentations graphiques de f et g est-elle maximale ?

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, considérons :

les plans $\pi\ :\ 3x - y + 6z - 6 = 0$ et $\alpha\ :\ 2x + 5y - 3z + 10 = 0$

ainsi que la droite $d\ :\ \begin{cases} x = 4 + 6\,k \\ y = 6\,k \\ z = \dfrac{21 + 88k}{2} \end{cases}$ et la sphère $\mathcal{S}\ :\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 10y + 6z + 26 = 0$

1. Calculer, en radians et en degrés, l'angle aigu φ formé par la droite d et le plan π.
2. Déterminer l'équation cartésienne du plan β perpendiculaire à π et contenant la droite d.
3. Déterminer les équations paramétriques de la droite d', symétrique de la droite d par rapport au plan π.
4. Déterminer la plus courte distance entre la sphère $\mathcal{S}$ et la droite d.
5. Déterminer les équations cartésiennes des plans parallèles au plan α et situés à une distance $\delta = \sqrt{152}$ du plan α.

Exercice 3

1. Soit la fonction définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-2i\}$ par $f(z) = \dfrac{i\,z - 5}{2z + 4\,i}$.
   a. Déterminer les nombres complexes z vérifiant $f(z) = z$.
   b. Montrer que l'image par f d'un imaginaire pur est un imaginaire pur.
2. Considérons l'équation (E) :
   $$z^4 - 4\,(2 - i)\,z^3 + 6\,(3 - 4\,i)\,z^2 - 4\,(2 - 11\,i)\,z - 88 - 24\,i = 0$$
   a. Déterminer un nombre complexe w et un nombre réel positif r tels que l'équation (E) soit le développement de $(z - w)^4 - r^4 = 0$
   b. En déduire que les solutions de l'équation (E) sont représentées dans le plan de Gauss par des points d'un même cercle. Donner le centre et le rayon de ce cercle.
   c. Représenter le cercle et les solutions dans le plan de Gauss.

Exercice 4

Considérons l'équation $(E)\ :\ y'' - 6y' + 9y = \dfrac{36x^2 - 12x - 1}{4\,x\,\sqrt{x}}$

1. Montrer que $p(x) = \sqrt{x}$ est une solution particulière de (E).
2. Donner la solution générale de (E).
3. Déterminer la solution de l'équation (E) dont la courbe passe par le point $A\,(0; 2)$ et qui admet un extremum en $x = 1$.

FIN

Bon travail !