Application des maths

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire • PC avec Mathematica
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 (4 points)

Soit la fonction $h(x) = e^x - \dfrac{1}{x}$.

1.1 En utilisant $x_0 = 1$ comme approximation initiale (point de départ) de la méthode de Newton , calculer les approximations suivantes x_1, x_2 et x_3 du zéro de h.

1.2 A l'aide du graphe de h, expliquer, sans faire de calculs, quel est l'ensemble des approximations initiales (points de départ) à partir desquelles les termes calculés par la méthode de Newton ne convergent pas.

Problème 2 (13 points)

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{2+x}$.

2.1 Calculer, **à la main**, un développement en série entière de $f(x)$, puis calculer son rayon de convergence.

2.2 En déduire que la série entière alternée

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{i\ 2^i} x^i$$

est une primitive de $f(x)$, puis calculer une valeur approchée, correcte jusqu'à la quatrième décimale, de l'intégrale définie $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ à l'aide du théorème sur l'estimation d'une série alternée.

2.3 Les 4 premières décimales de cette valeur approchée sont identiques à celles de $\ln(2)$. Est-ce un hasard ? Argumenter votre réponse.

2.4 Soit T_n l'approximation de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ calculée par la méthode des trapèzes. Au moyen de la borne d'erreur pour la méthode des trapèzes, quelle serait la valeur minimale de n pour que $|T_n - I| \leq \dfrac{10^{-4}}{2}$?

2.5 Créer un module dans Mathematica qui calcule $\int_a^b h(x)dx$ par la méthode des trapèzes (les arguments de ce module sont : n=nombre de trapèzes, a=bord gauche de l'intervalle, b=bord droit de l'intervalle et h la fonction continue sur $[a;b]$ à intégrer).

Problème 3 **(22 points)**

Un réservoir contient actuellement 800 litres d'eau salée dont la teneur en sel est de 0.04 kilogramme par litre. On y déverse de l'eau pure à raison de 16 litres par minute. En même temps, la solution, complètement brassée, s'écoule du réservoir à raison de 20 litres par minute. On pose $S(t)$ la quantité de sel en kilogrammes dans le réservoir après t minutes.

3.1 Démontrer que si $S(t)$ satisfait aux conditions ci-dessus, alors elle est également la solution de l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' &= \dfrac{5\,y}{-200+t} \\ y(0) &= 32 \end{cases}$$

3.2 Résoudre cette équation différentielle à l'aide de Mathemetica.

3.3 Calculer **à la main** sa solution $S(t)$.

3.4 Utiliser la méthode d'Euler avec 5 itérations (avec un pas de $h = 4$) pour estimer $S(20)$.

3.5 **Description d'une méthode de Kutta :**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ k_2 &= f(x_n + \frac{h}{3}, y_n + k_1\frac{h}{3}), \\ k_3 &= f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n - k_1\frac{h}{3} + k_2 h), \\ k_4 &= f(x_n + h, y_n + k_1 h - k_2 h + k_3 h), \text{ et} \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = x_n + h.$$

Implémenter en Mathematica la méthode décrite ci-dessus dans un module qui a l'en-tête suivante :

kuttaMethod[f_, x0_, y0_, a_, n_].

Ce module retourne en output la valeur $y(a)$ où y est la solution de l'équation différentielle $y' = f(x, y)$ sous la condition initiale $y(x_0) = y_0$, et n est le nombre de pas de la méthode.

3.6 On supposera que l'on peut estimer l'erreur globale $e(h)$ d'une méthode d'ordre p pour un pas de longueur h par la relation suivante :

$$e(h) = Ch^p.$$

A l'aide du module **kuttaMethod** et de l'équation différentielle donnée en (3.1), créer dans Mathematica un tableau de 6 colonnes et 4 lignes ayant les informations complétées ci-dessous :

n	16	32	64	128	256
$y(20)$					
$\frac{e(h)}{e(h/2)}$					
p					

Problème 4 (14 points)

On donne les contraintes suivantes

$$\begin{cases} x + 3y + 3z \leq 300 \\ 2x + y + 2z \leq 200 \\ 2x + 6y + 2z \leq 480 \\ \text{où} \quad x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } z \geq 0 \end{cases}$$

On veut maximiser $f(x, y, z) = 10x + 8y + 12z$.

4.1 **A la main**, représenter graphiquement le polyèdre des contraintes dans un repère orthonormé.

4.2 La fonction f prend son maximum sur le seul sommet du polyèdre qui n'est ni placé dans le plan (Oxy), ni dans (Oxz) et ni dans (Oyz). Calculer les coordonnées de ce sommet, puis évaluer le maximum de f.

4.3 Pour ce problème d'optimisation, la méthode du simplexe fournit la valeur maximale en 4 matrices (en comptant la matrice de base des données). Etablir ces 4 matrices.

4.4 Réaliser une simulation de Monte-Carlo avec 1 million de points aléatoires pour calculer le volume de ce polyèdre.