Tous les problèmes ont le même poids pour le calcul de la note.

Problème 1

Soit l'origine O et deux points $A(2; 10)$ et $B(6; 2)$.

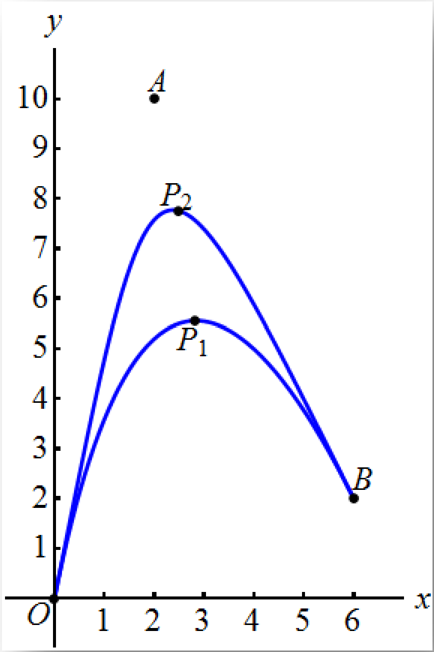
On considère deux courbes données par

$$c_1: \overrightarrow{OP_1}(t) = 2t(1-t)\,\overrightarrow{OA} + t^2\,\overrightarrow{OB}$$

et

$$c_2: \overrightarrow{OP_2}(t) = 3t(1-t)\,\overrightarrow{OA} + t^3\overrightarrow{OB}$$

avec $t \in [0; 1]$.



a) Écrire les équations paramétriques qui décrivent les trajectoires de P_1 et de P_2.
$$c_1(t): \begin{cases} x_1(t) = \cdots \\ y_1(t) = \cdots \end{cases} \quad \text{et} \quad c_2(t): \begin{cases} x_2(t) = \cdots \\ y_2(t) = \cdots \end{cases}$$
en fonction du temps t, avec $t \in [0; 1]$.

b) Calculer l'ordonnée maximale que peut atteindre le point P_1.

c) Déterminer la distance non nulle qui sépare les points P_1 et P_2 en l'instant unique où ils se trouvent précisément l'un sous l'autre.

d) Déterminer le temps t_1 pour lequel l'abscisse du point P_1 vaut 2.

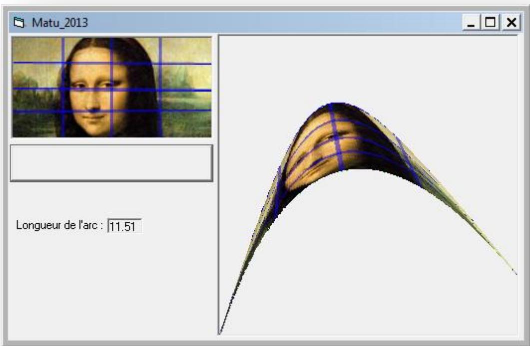
e) Utiliser la méthode de Newton en deux pas à partir de la graine $t_0 = 0$ pour estimer le temps t_2 pour lequel l'abscisse du point P_2 vaut 2.

On suppose que les fonctions $x_1(t)$ et $y_1(t)$, ainsi que $x_2(t)$ et $y_2(t)$, qui donnent les coordonnées de P_1, respectivement P_2, sont connues. Elles peuvent donc être utilisées dans les codes des deux programmes à réaliser.

f) Écrire un programme qui donne une estimation de la longueur de la trajectoire de P_1. Cette longueur sera affichée au centième dans une zone d'étiquette.

g) Écrire le code du programme qui dessine les courbes c_1 et c_2 pour $0 \le x \le 6$ et $0 \le y \le 10$ dans la zone d'image *Picture2* de taille 300x300 pixels.

h) On souhaite transformer une image de dimension 200x100 pixels contenue dans la zone d'image *Picture1* de sorte qu'elle prenne, dans *Picture2*, la forme de la surface fermée délimitée par les courbes c_1 et c_2.
La transformation qui envoie un pixel $(x; y)$ sur son image $(x'; y')$ transforme les segments verticaux en segments reliant les points P_1 et P_2 des courbes c_1, respectivement c_2.
Déterminer les coordonnées de $(x'; y')$ en fonction de $(x; y)$.



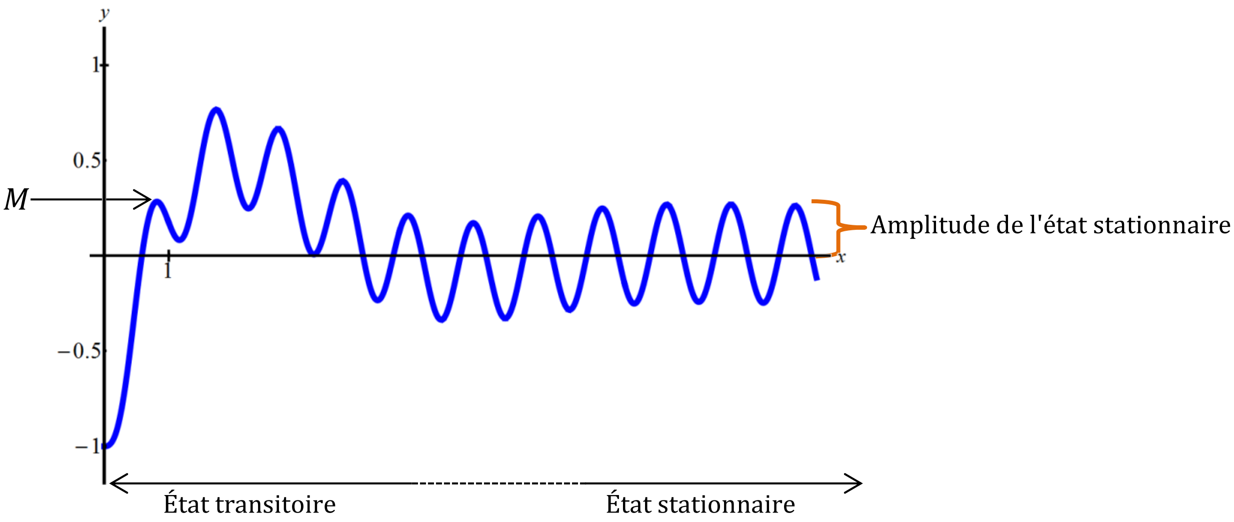
Problème 2

On considère l'équation différentielle

$$y'' = 10\sin(2\pi x) - y - y'$$

On s'intéresse à la solution $s = s(x)$ telle que $s(0) = -1$ et $s'(0) = 0$.

Le graphe de s est le suivant.



À un état transitoire succède un état stationnaire où le graphe de s est une oscillation régulière.

a) Au moyen de la méthode d'Euler avec un pas $h = 0{,}25$ estimer $s''(0{,}5)$.

b) On utilise la méthode d'Euler avec un pas h inconnu.
On note f l'estimation de s'' et après un seul pas on obtient

$$f(h) = 10\sin(2\pi h) + 1 - h$$

Pour une valeur h_0 comprise entre 0,50 et 0,55 on a $f(h_0) = -1$.

1) Au moyen de la méthode de la bissection, déterminer la valeur de h_0 au centième près.

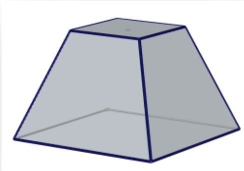
2) Avec la valeur h_0 trouvée en 1), déterminer l'estimation de $s(2h_0)$.
Cette estimation correspond-elle au graphe de s donné ci-dessus ?
Justifier votre réponse.

c) Écrire un programme qui, au moyen de la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{1024}$, estime l'ordonnée du premier maximum M de s. Voir figure.

d) Compléter le programme pour qu'il détermine l'amplitude de l'état stationnaire.
On admettra que l'état stationnaire est atteint si la valeur absolue de la différence de deux amplitudes consécutives est inférieure à 10^{-3}.

F_r

Problème 3



Une pyramide régulière de 6 cm de hauteur et dont la base carrée est donnée dans le sol est tronquée par un plan horizontal de cote 3 cm.

a) Construire la perspective du tronc de pyramide.

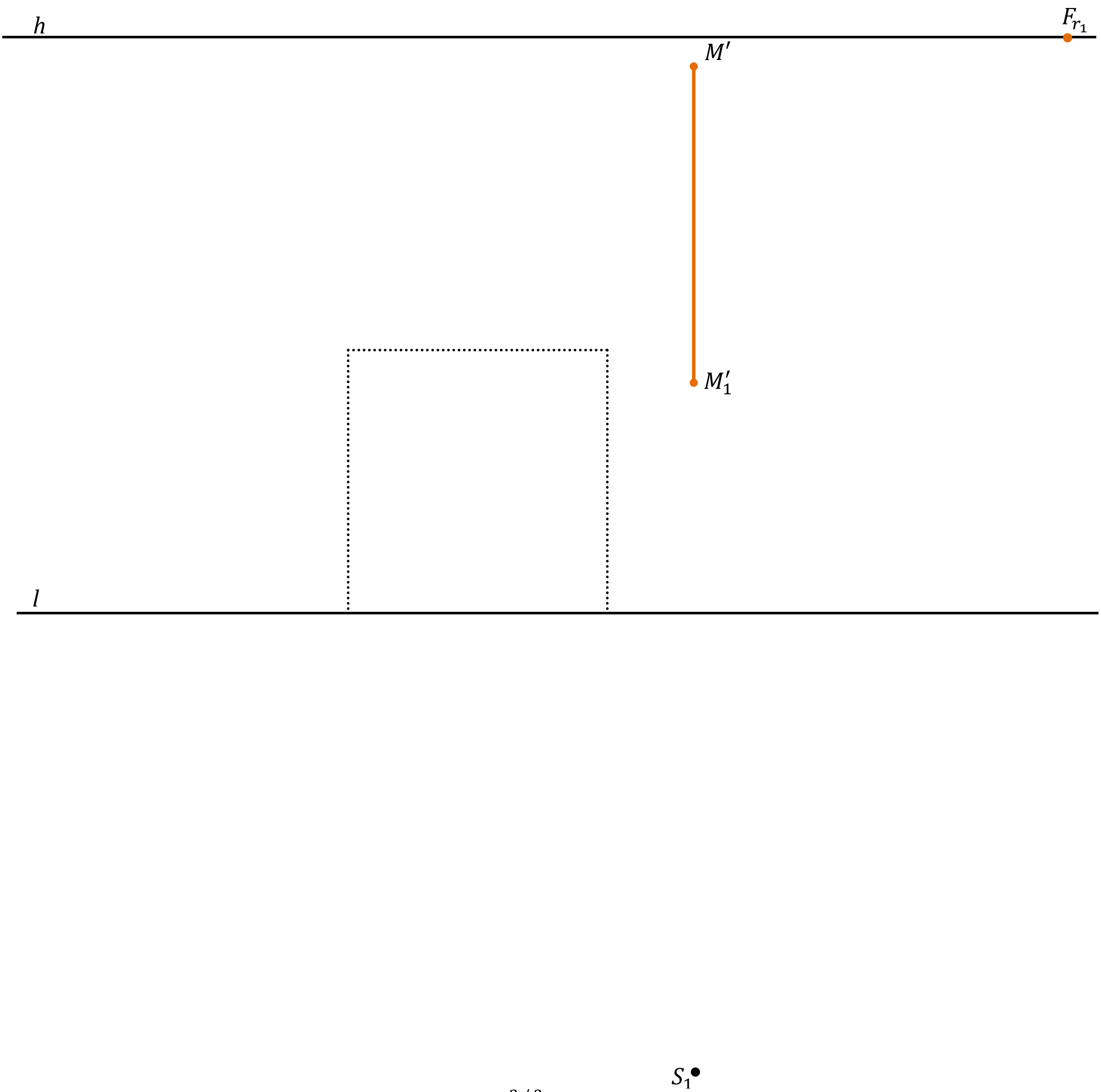
Cette pyramide est éclairée par des rayons lumineux dont la direction est donnée par le point de fuite F_r.

b) Construire la perspective de l'ombre du tronc de pyramide sur le sol.

Un mât est donné par sa perspective $M_1' \; M'$.

c) Construire la perspective de l'ombre du mât.

d) Par une construction, déterminer la hauteur du mât.



Problème 1

a) $c_1(t): \begin{cases} x_1(t) = 2t^2 + 4t \\ y_1(t) = -18t^2 + 20t \end{cases}, \; c_2(t): \begin{cases} x_2(t) = 6\mathrm{t}^3 - 6t^2 + 6t \\ y_2(t) = 2t^3 - 30t^2 + 30t \end{cases}$

b) $y_1'(t) = -36t + 20 \, , y_1'(t) = 0 \;\Longrightarrow\; t = \frac{5}{9} \cong 0{,}555 \, , y_1\left(\frac{5}{9}\right) = \frac{50}{9} \cong 5{,}56.$

c) $x_1(t) = x_2(t) \underbrace{\Longrightarrow}_{t\in]0;1[} 3t^2 - 4t + 1 = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{t\in]0;1[} t = \frac{1}{3} \;\Longrightarrow\; d = y_2\left(\frac{1}{3}\right) - y_1\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{56}{27} \cong 2{,}074$

d) $x_1(t) = 2 \;\Longrightarrow 2t^2 + 4t - 2 = 0 \underbrace{\Longrightarrow}_{t\in]0;1[} t_1 = \sqrt{2} - 1 \cong 0{,}414$

e) $x_2(t) = 2 \;\Longrightarrow\; 3t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = 0$
Newton : $N(t) = t - \frac{3t^3-3t^2+3t-1}{9t^2-6t+3}$, $N(0) = \frac{1}{3}$, $N\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{9} \cong 0{,}444$

f)
```
Let l = 0
Let x = 0: y = 0
For t = 1 / 128 To 1 Step 1 / 128
 Let xx = x1(t) : yy = y1(t)
 Let l = l + Sqr((x – xx) ^ 2 + (y – yy) ^ 2)
 Let x = xx: y = yy
Next t
Let Label2.Caption = Format(l, "0.00")
```

g)
```
Picture2.PSet (0, 300)
 For t = 0 To 1 Step 1 / 128
  Picture2.Line -(50 * x1(t), 300 - 30 * y1(t)), RGB(0, 255, 0)
 Next t
 Picture2.PSet (0, 300)
 For t = 0 To 1 Step 1 / 128
  Picture2.Line – (50 * x2(t), 300 – 30 * y2(t)), RGB(0, 0, 255)
 Next t
```

h) $x' = 50 \cdot (x2\left(\frac{x}{200}\right) + \frac{y}{100} \cdot \left(x1\left(\frac{x}{200}\right) - x2\left(\frac{x}{200}\right)\right)$
$y' = 300 - 30 \cdot (y2\left(\frac{x}{200}\right) + \frac{y}{100} \cdot \left(y1\left(\frac{x}{200}\right) - y2\left(\frac{x}{200}\right)\right)$

Problème 2

a) $y'' = 10 \cdot \sin(2\pi x) - y - y'$

x	y	y'	$y'' = 10 \cdot \sin(2\pi x) - y - y'$
0	-1	0	1
$\frac{1}{4}$	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{43}{4}$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{15}{16}$	$-\frac{47}{16}$	**-2**

b) $f(h) = -1 \iff 10\sin(2\pi h) + 2 - h = 0$

h	0,50	0,55	0,53	0,52	0,525
$10\sin(2\pi h) + 2 - h$	$+$	$-$	$-$	$+$	$-$

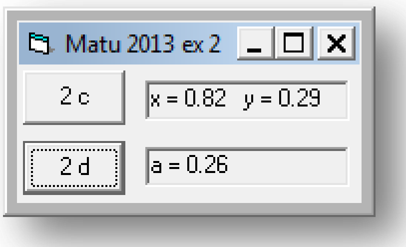
$h \cong 0{,}52$

x	y	y'	$y'' = 10 \cdot \sin(2\pi x) - y - y'$
0	-1	0	1
0,52	-1	0,52	
1,04	-0,73		

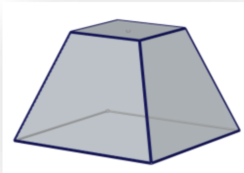
Le pas $h = \frac{1}{2}$ est bien trop grand pour que les résultats soient cohérents.

c)
```
Let x = 0 : y =  –1 : yp = 0 : h = 1/ 1024  : Pi = 4 * Atn(1)
Do
 Let ys = 10*sin(2*Pi*x) – y – yp
 Let x = x + h
 Let y = y + h * yp
 Let ayp = yp
 Let yp = yp + h * ys
Loop Until yp * ayp < 0
Let Label1.Caption = Format(y , "0.00")
```

d)
```
Let a = 0
Do
 Programme du point c
 Let aa = a
 Let a = Abs(y)
Loop Until Abs(aa – a) < 0.001
Let Label2.Caption = Format(a , "0.000")
```



Problème 3



Une pyramide régulière de 6 cm de hauteur et dont la base carrée est donnée dans le sol est tronquée par un plan horizontal de cote 3 cm.

a) Construire la perspective du tronc de pyramide.

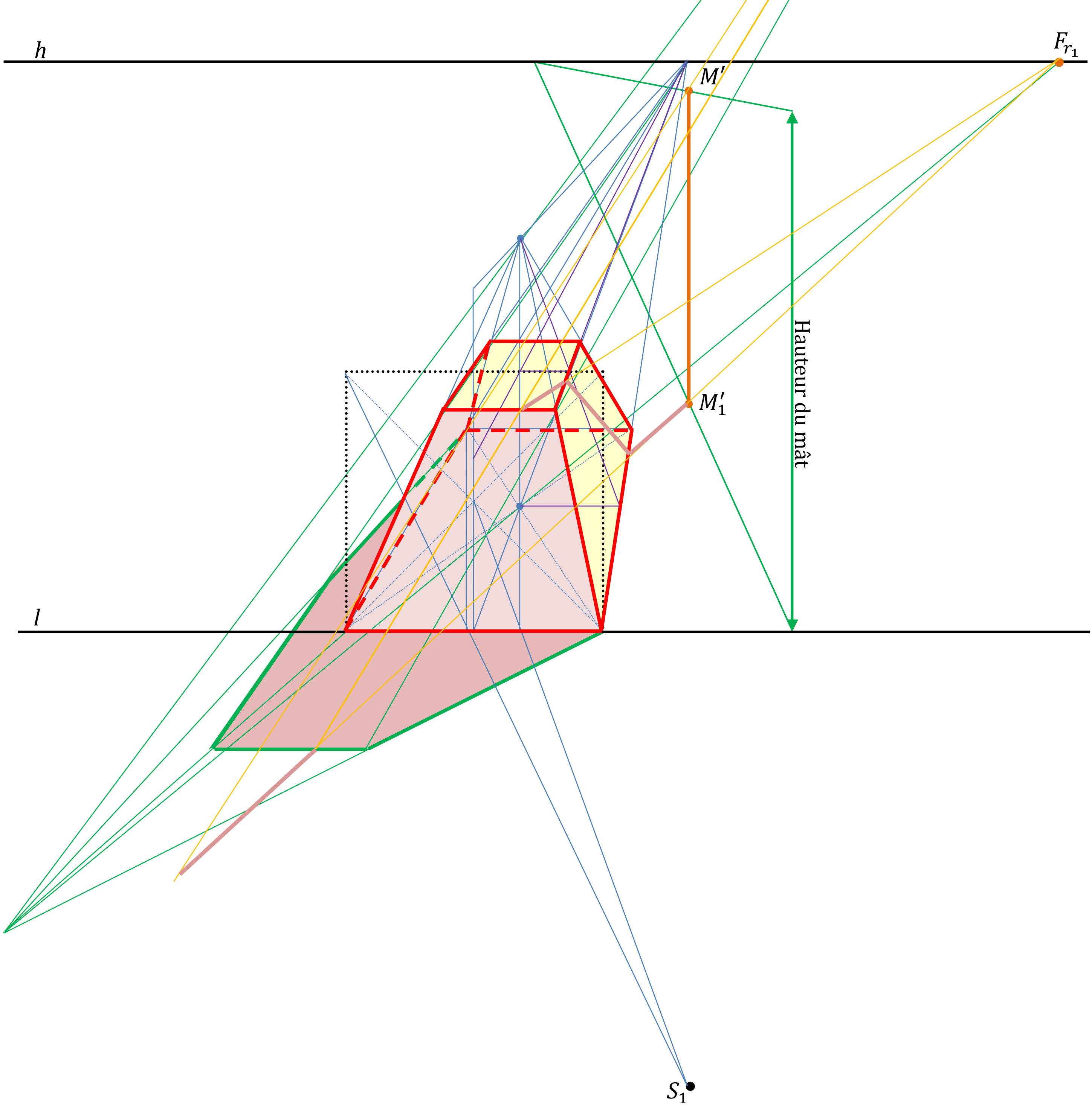
Cette pyramide est éclairée par des rayons lumineux dont la direction est donnée par le point de fuite F_r.

b) Construire la perspective de l'ombre du tronc de pyramide sur le sol.

Un mât est donné par sa perspective $M_1' \, M'$.

c) Construire la perspective de l'ombre du mât.

d) Par une construction, déterminer la



Barème indicatif

Problème 1		17 points
a)	1	
b)	2	
c)	2	
d)	1	
e)	3	
f)	2 ½	
g)	2 ½	
h)	3	

Problème 2		17 points
a)	3	
b1)	3	
b2)	3	
c)	4	
d)	4	

Problème 3	17 points
Pyramide tronquée	7
Ombre de la pyr. sur le sol	5
Ombre du mât	3
Hauteur du mât	2

Total 51 points

Note $\boldsymbol{n = 1 + \frac{\text{nb points}}{10}}$ arrondie au quart de point