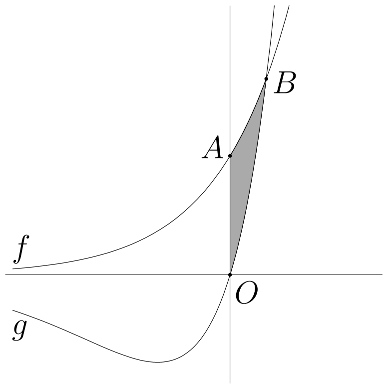
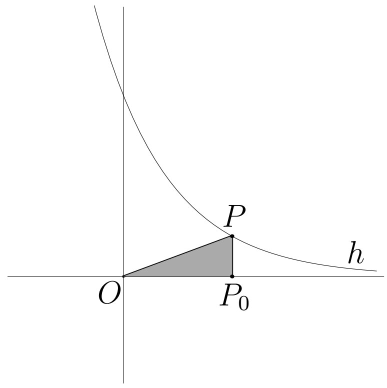
Problème 1 (poids 2)

Première partie

Voici la représentation graphique des fonctions

$$f : x \longmapsto y = 2e^x, \quad g : x \longmapsto y = 4xe^x \quad \text{et} \quad h : x \longmapsto y = 2e^{-x}.$$





a) Calculer les coordonnées de A, point d'intersection du graphe de f avec l'axe des y, et de B, point d'intersection des graphes de f et g.

b) Déterminer les coordonnées du minimum du graphe de la fonction g.

c) Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f en A.

d) Calculer l'aire de la surface grise OBA.

e) Pour $x > 0$, on choisit un point $P(x; h(x))$ du graphe de h et on note P_0 sa projection sur l'axe des x. Déterminer x pour que l'aire du triangle OP_0P soit maximale et calculer cette aire maximale.

Deuxième partie

On donne la fonction $f : x \longmapsto y = \dfrac{2x^2 + cx}{x^2 + 1}$ où c est une constante réelle.

f) Le graphe de f a une seule asymptote. Trouver son équation.

g) Prouver que le graphe de f a exactement deux points à tangente horizontale pour toute valeur non nulle de c.

h) Posons $c = \frac{8}{3}$. On a alors $f(x) = \dfrac{2x^2 + \frac{8}{3}\,x}{x^2 + 1} = \dfrac{6x^2 + 8x}{3x^2 + 3}$ et $f'(x) = \dfrac{-8x^2 + 12x + 8}{3(x^2 + 1)^2}$.

Déterminer les zéros de f ainsi que le point d'intersection du graphe de f avec son asymptote. Calculer les coordonnées des points à tangente horizontale du graphe de f, puis, sans faire de calculs supplémentaires, dessiner ce graphe en prenant 3 carreaux comme unité sur chaque axe.

Problème 2 (poids 2)

Première partie

On considère le plan π d'équation $2x - y + 2z - 36 = 0$.
Ce plan contient les points $A(6; 0; 12)$, $B(7; -8; 7)$, $C(2; -16; 8)$ et $D(1; -8; 13)$.

a) Montrer par calcul que le quadrilatère $ABCD$ est un losange.
Calculer son aire et ses angles.

b) Appelons M le milieu du losange et considérons la sphère $\mathcal{S}$ centrée en M et tangente aux quatre côtés du losange.

b1) Déterminer l'équation de la sphère $\mathcal{S}$, ainsi que les coordonnées du point de tangence T de $\mathcal{S}$ avec le côté AB.

b2) Déterminer l'équation du plan α qui contient le côté AB et est tangent à $\mathcal{S}$.

c) Soit $\mathcal{S}'$ la sphère d'équation $x^2 + (y + 6)^2 + (z - 6)^2 = 225$.
Déterminer le rayon du cercle d'intersection de $\mathcal{S}'$ et de π. Montrer que le losange et le cercle ont le même centre.

d) Quelle est la position relative du losange par rapport au cercle ?

Deuxième partie

Pour les dessins, utiliser la feuille annexée (page 4).
Employer différentes couleurs et dessiner les parties invisibles en traitillé.

e) Dessiner les traces du plan $\pi : x + 2y - z - 6 = 0$.

f) La droite d passe par le point $A(4; 3; 4)$, est parallèle au mur et contenue dans le plan π. Dessiner cette droite ainsi que sa projection sur le sol.

g) Trouver un vecteur directeur de d.

Problème 3 (poids 1)

Au magasin *Sorgim*, on reçoit un petit animal en plastique pour chaque tranche de 20 francs d'achats.
La collection complète comporte 48 animaux, répartis en quatre familles :
il y a 12 mammifères, 12 oiseaux, 12 reptiles et 12 poissons.
Les animaux sont emballés dans des sachets identiques (un animal par sachet) et distribués au hasard (de manière équiprobable).

Catherine fait des achats chez *Sorgim* pour un peu plus de 200 francs et rapporte dix sachets à son fils Victor, qui les ouvre l'un après l'autre.
Parmi les 10 animaux en plastique, quelle est la probabilité que Victor trouve

a) au moins un mammifère ?

b) exactement 4 mammifères ?

Les figurines ont parfois un défaut de fabrication : c'est le cas d'un mammifère sur 6 et d'un oiseau sur 8. Les reptiles et les poissons n'ont pas de défaut.

c) Victor reçoit un animal. Quelle est la probabilité qu'il n'ait pas de défaut ?

d) Victor déballe un animal qui n'a pas de défaut. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un mammifère ?

Quelques semaines plus tard, il ne manque à la collection de Victor que des mammifères. Sa maman décide de faire suffisamment d'achats pour que la probabilité d'avoir au moins un mammifère soit supérieure à 95%.

e) Quel est alors le montant minimal des achats de Catherine ?

f) Victor décide d'ouvrir des sachets jusqu'à ce qu'il trouve un mammifère. Quelle est la probabilité qu'il doive ouvrir moins de 4 sachets ?

Lors de la dernière semaine de l'offre, la *Sorgim* ajoute un certain nombre de figurines spéciales, des *dinodors*, emballées dans des sachets différents. La probabilité de recevoir un *dinodor* est alors deux fois moins élevée que celle de recevoir un mammifère. De plus, les événements "recevoir un mammifère", "recevoir un oiseau", "recevoir un reptile" et "recevoir un poisson" restent équiprobables.

g) En allant dépenser 20 francs à la *Sorgim*, quelle est la probabilité de recevoir un *dinodor* ?

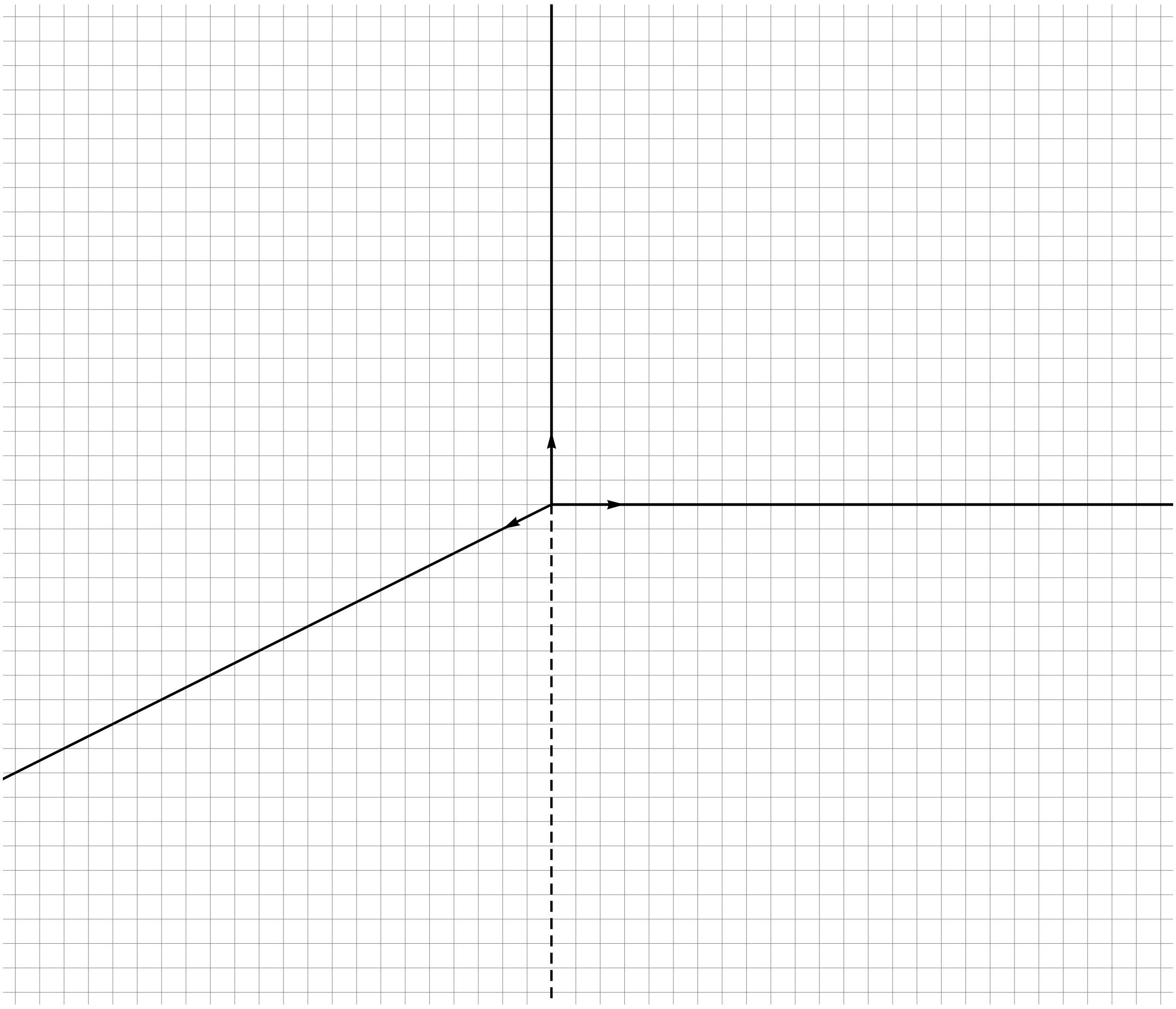
LYCÉE DENIS-DE-ROUGEMONT
Neuchâtel et Fleurier

EXAMEN DE MATURITÉ
Mathématiques de niveau 1

Session 2014

Nom et prénom : **Classe :**

Annexe pour le problème 2



Problème 1

Première partie

a) $A(0;2)$ et $f(x) = g(x) \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$, d'où $B(\frac{1}{2}; 2\sqrt{e})$ (avec $2\sqrt{e} \cong 3,3$).

b) $g'(x) = 4e^x(1+x) = 0 \Longrightarrow x = -1$ et $M(-1; -\frac{4}{e})$ (avec $-\frac{4}{e} \cong -1,47$).

c) $f'(x) = 2e^x$; la pente de la tangente vaut $f'(0) = 2$, donc $t : y = 2x + 2$.

d) $$\text{Aire } = \int_0^{1/2} (f(x) - g(x))dx = \int_0^{1/2} (2-4x)e^x dx$$
$$= (2-4x)e^x\Big|_0^{1/2} + 4\int_0^{1/2} e^x dx = (6-4x)e^x\Big|_0^{1/2} = 4\sqrt{e} - 6 \cong 0,595.$$

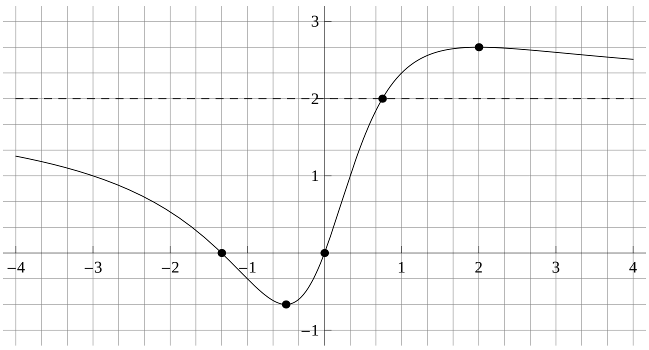
e) L'aire du triangle est donnée par $A(x) = \frac{1}{2}\, x\, h(x) = xe^{-x}$.
Cette aire est maximale lorsque $A'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$, c'est-à-dire pour $x = 1$.
Elle vaut alors $A(1) = \frac{1}{e} \cong 0,37$.
(Il s'agit bien d'un maximum car $A(0) = 0$ et $A(x) \longrightarrow 0$ lorsque $x \to \infty$.)

Deuxième partie

f) Asymptote horizontale d'équation $y = 2$.

g) $$f'(x) = \frac{(4x+c)(x^2+1) - (2x^2+cx)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-cx^2+4x+c}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow -cx^2+4x+c = 0.$$
Pour $c \neq 0$, le discriminant vaut $\Delta = 16 + 4c^2$, valeur toujours positive !
Le graphe de f a donc toujours 2 points à tangente horizontale pour $c \neq 0$.

h) $f(z) = 0 \Longrightarrow z_1 = 0$ et $z_2 = -\frac{4}{3}$;
$f(x) = 2 \Longrightarrow 6x^2 + 8x = 6x^2 + 6 \Longrightarrow x = \frac{3}{4}$, donc $I(\frac{3}{4}\,; 2)$;
$f'(x) = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{3\pm 5}{4} \Longrightarrow x_1 = 2$ et $x_2 = -\frac{1}{2}$
et les points à tangente horizontale sont $H_1(2; \frac{8}{3})$ et $H_2(-\frac{1}{2}\,; -\frac{2}{3})$.



Problème 2

Première partie

a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} = \overrightarrow{DC}$: il s'agit d'un parallélogramme.

De plus $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{90} = 3\sqrt{10} = \|\overrightarrow{AD}\|$, donc c'est un losange.

Angle en A (= angle en C) : $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AD}}{90} = \frac{3}{5} \Longrightarrow \alpha = \gamma \cong 53,13°$
et donc $\beta = \delta = 180° - \alpha \cong 126,87°$.
Son aire vaut $A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\| = 90\sin(\alpha) = 72$.

b) $M(4; -8; 10)$.

b1) Plan β par M perpendiculaire à AB : $x - 8y - 5z - 18 = 0$;
le point de tangence T est à l'intersection de β et de la droite AB :
$6 + \lambda - 8(-8\lambda) - 5(12 - 5\lambda) - 18 = 0 \Rightarrow 90\lambda - 72 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{5}$ et $T(\frac{34}{5}; -\frac{32}{5}; 8)$.
Le rayon de la sphère vaut $R = \|\overrightarrow{MT}\| = \sqrt{(\frac{14}{5})^2 + (\frac{8}{5})^2 + 2^2} = \sqrt{14,4} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$
et donc $\mathcal{S} : (x-4)^2 + (y+8)^2 + (z-10)^2 = \frac{72}{5} = 14,4$.

Variante : $R = \delta(M; AB) = \dfrac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{2}{\sqrt{90}} \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \frac{2}{\sqrt{90}} \left\| \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} \right\|$

$= \frac{36}{3\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$, ce qui donne l'équation de $\mathcal{S}$,
et on calcule ensuite les coordonnées de T par intersection avec la droite AB.

b2) Le vecteur normal $\overrightarrow{n}_\alpha$ est parallèle à $\overrightarrow{MT} = \begin{pmatrix} 14/5 \\ 8/5 \\ -2 \end{pmatrix}$, et le plan α contient T,
donc $\alpha : 7x + 4y - 5z + 18 = 0$.
Variante : $\overrightarrow{n}_\alpha = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{n}_\pi = \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$, et $A \in \alpha$.

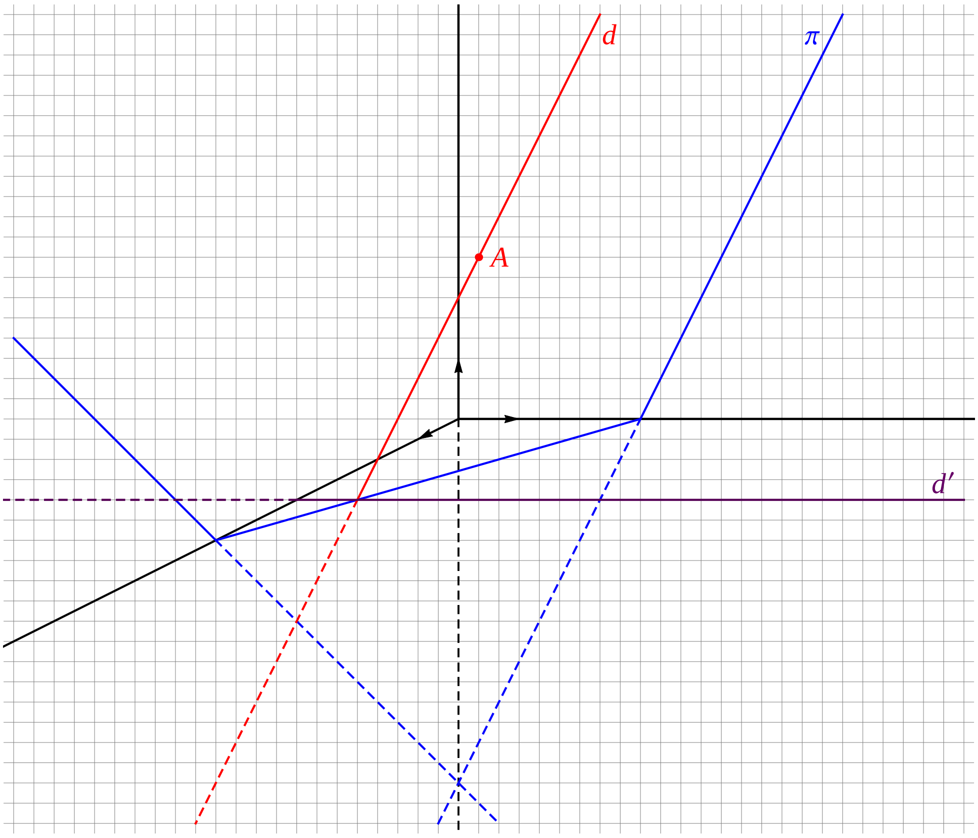
c) Le centre de $\mathcal{S}'$ est $M'(0; -6; 6)$ et son rayon vaut $R' = 15$.
Rayon du cercle : $r = \sqrt{R'^2 - \delta(M'; \pi)} = \sqrt{225 - 36} = \sqrt{189} \cong 13,75$.
Centre du cercle : $\pi \cap d : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = -6 - \lambda \\ z = 6 + 2\lambda \end{cases}$; on obtient $4\lambda + 6 + \lambda + 12 + 4\lambda - 36 = 0$
$\Longrightarrow \lambda = 2$ et $C'(4; -8; 10) = M$! !

d) La longueur de la demi-grande diagonale du losange est $\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{72}$, longueur inférieure au rayon du cercle. Il s'ensuit que le losange est dans le cercle.

Problème 2

Deuxième partie

e) $I_x(6;0;0)$, $I_y(0;3;0)$, $I_z(0;0;-6)$ et f)



g) $\overrightarrow{d} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ ou alors $\overrightarrow{d}$ est parallèle à $\overrightarrow{I_yI_z} = \begin{pmatrix}0\\-3\\-6\end{pmatrix}$.

Problème 3

a) $1-(\frac{3}{4})^{10} \cong 94,37\%$.

b) $C_4^{10}(\frac{1}{4})^4(\frac{3}{4})^6 \cong 14,6\%$.

c) $\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8}+\frac{1}{2} = \frac{89}{96} \cong 92,71\%$.

d) $\frac{5/24}{89/96} = \frac{20}{89} \cong 22,47\%$.

e) $1-(\frac{3}{4})^n > 0,95 \Longrightarrow (\frac{3}{4})^n < 0,05 \Longrightarrow n\ln(\frac{3}{4}) < \ln(0,05) \Longrightarrow n > \frac{\ln(0,05)}{\ln(3/4)} \cong 10,41$.
Victor doit donc recevoir au minimum 11 animaux.
Par conséquent le montant minimal des achats de Catherine est de 220 francs.

f) P(1 sachet) + P(2 sachets) + P(3 sachets) $= \frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}+(\frac{3}{4})^2\cdot\frac{1}{4} = \frac{37}{64} \cong 57,81\%$,
ou alors 1− P(plus de 3 sachets) $= 1-(\frac{3}{4})^3$.

g) Si P(dinodor)$= p$, alors P(mammifère)=P(oiseau)=P(reptile)=P(poisson)$= 2p$
et on a $p + 4\cdot 2p = 1$, d'où $p = \frac{1}{9}$ ($\cong 11,11\%$).