

Durée : 240 minutes

Matériel autorisé : formulaire Polymaths annoté,  
sans ajout de pages, sans collage  
d'éléments supplémentaires ni de  
«Tipp-Ex», calculatrice sans écran  
graphique, ne permettant pas le calcul  
formel, la résolution automatique  
d'équations, le calcul intégral ou le calcul  
matriciel,  
règle, équerre, rapporteur, compas

**Consignes :**

1. Le candidat met son nom sur toutes les feuilles, y compris celles de brouillon.
2. Les points attribués à chaque problème sont indiqués entre parenthèses à droite du n° du problème.
3. Après avoir si nécessaire travaillé sur un brouillon, le candidat rédige à l'encre les solutions sur les feuilles officielles.  
La rédaction doit être soignée.  
Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés.  
Les feuilles de brouillon sont jointes aux feuilles officielles mais ne seront pas corrigées.

**Problème 1 [38 pts]**

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

**Partie A (12 pts)**

Soient, relativement à un repère orthonormé, les cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  donnés par

$$(\Gamma_1) : x^2 + y^2 - 4x - 10y - 231 = 0 \quad \text{et} \quad (\Gamma_2) : x^2 + y^2 - 30x - 62y + 601 = 0$$

1. Trouver les coordonnées des deux points d'intersection des cercles  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ .  
On appellera  $A$  le point d'abscisse positive.
2. On appelle  $t_1$  et  $t_2$  les tangentes respectives à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  en  $A$ . Montrer que  $t_1$  et  $t_2$  sont perpendiculaires.

**Partie B (26 pts)**

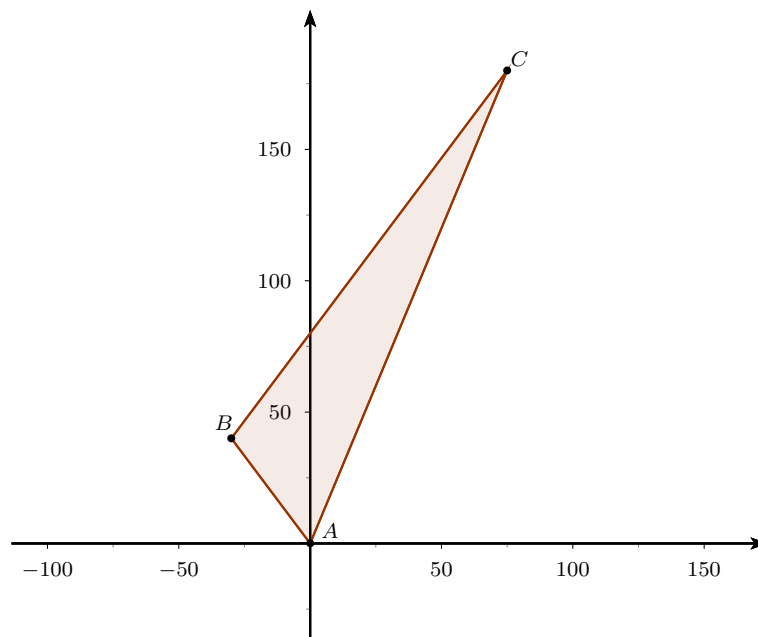
Soient, relativement à un repère orthonormé, les points définis par

$$A(0;0) \quad , \quad B(-30;40) \quad \text{et} \quad C(75;180)$$

1. Déterminer par le calcul une équation du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$ .
2. Déterminer l'aire  $\sigma$  du triangle  $ABC$ .
3. Vérifier que

$$\sigma = p \cdot r$$

où  $p$  est le demi-périmètre du triangle  $ABC$  et où  $r$  est le rayon du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$ .



## Problème 2 [43 pts]

Les parties A, B et C de ce problème sont indépendantes.

### Partie A (25pts)

Soit  $f$  la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\ln(x)}$$

1. Étudier le signe de  $f$ .
2. Étudier la croissance de  $f$  et donner les coordonnées de ses éventuels extrema.
3. Déterminer les équations des éventuelles asymptotes verticales ou horizontales de  $y = f(x)$ .
4. Esquisser le graphe de  $f$ .

### Partie B (8 pts)

Soient, relativement à un repère orthonormé, les points

$$A(1;0) \quad , \quad B(4;0) \quad , \quad C(4;2) \quad , \quad D(1;2)$$

Le rectangle  $ABCD$  est partagé en deux domaines par la courbe  $y = \sqrt{x}$ . Calculer le rapport des aires des domaines ainsi déterminés.

### Partie C (10 pts)

Étudier la croissance et déterminer les coordonnées des éventuels extrema de la fonction définie par

$$f(x) = \int_1^{e^x-1} (2t-1) dt$$

### Problème 3 [27 pts]

Les parties A, B et C de ce problème sont indépendantes.

#### Partie A (4 pts)

Après une nouvelle marée noire, l'organisme de protection des oiseaux de mer a évalué à 2000 la population de mouettes dans la zone sinistrée. On a bagué 100 d'entre elles. Peu après, on capture 20 mouettes dans cette zone. Calculer la probabilité de n'avoir aucune mouette baguée.

#### Partie B (17 pts)

1. On lance trois fois de suite un dé à quatre faces, numérotées de 1 à 4, en notant à chaque lancer le résultat ; on obtient ainsi un nombre de trois chiffres (le premier tirage donne le chiffre des centaines, le deuxième celui des dizaines et le troisième celui des unités).
  - (a) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?
  - (b) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre inférieur ou égal à 225 ?
  - (c) Quelle est la probabilité que ce nombre soit un multiple de 9 ?

2. Un jeu consiste à jeter deux fois un dé à huit faces, numérotées de 1 à 8, et à noter le couple résultat. Le joueur gagne s'il obtient la paire 7 et 8, ou s'il obtient le double 6.

Le dé a été modifié de sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit de 0.2 et celle d'obtenir 8 soit égale à 0.2 également ; les autres faces ont la même probabilité de sortir.

Déterminer la probabilité de gagner.

#### Partie C (6 pts)

Une urne  $A$  contient 8 boules numérotées de 1 à 8 et une urne  $B$  contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne. Si le nombre indiqué sur la boule est un multiple de 3, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne  $A$ .