

EXAMEN ECOLE DE MATURITÉ
Session de juin 2014
MATHÉMATIQUES – NIVEAU RENFORCÉ

Groupes concernés :	3Mmr1, 3Mmr8, 3MSmr1, 3MSmr2
Horaire :	mardi 10 juin 2014, 8 h 15 - 12 h 15
Matériel autorisé :	<ul style="list-style-type: none">• formulaire officiel des gymnases (non annoté)• table numérique CRM• calculatrice de type reconnu• complément officiel du formulaire 2014

Prière de ne rien inscrire sur la feuille de donnée

Total des points : 84 points

Problème 1 (24 points)

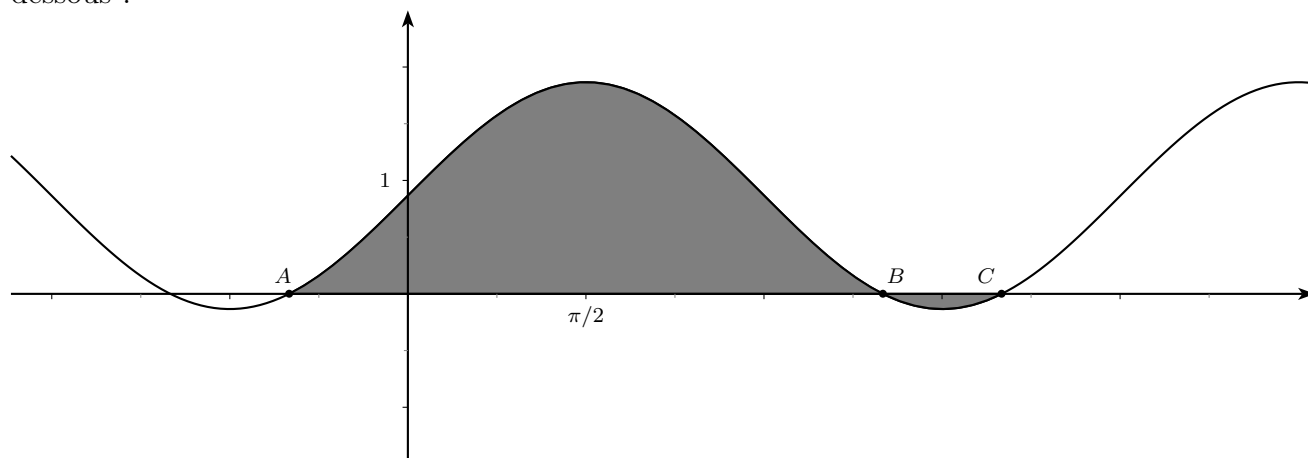
On considère la fonction f donnée par

$$f(x) = \frac{(x+2)^3}{(x+1)^2}$$

- 1.1. Etudier la fonction f . On demande l'ensemble de définition, le signe, les équations des asymptotes, la position relative du graphe et de l'asymptote oblique, la dérivée, les coordonnées des extremums et l'esquisse du graphe.
- 1.2. Calculer l'aire du domaine borné limité par les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ et le graphe de f .

Problème 2 (8 points)

Le graphe de la fonction donnée par $f(x) = \sin(x) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ est en partie représenté ci-dessous :



- 2.1. Calculer les coordonnées des points A , B et C .
- 2.2. Calculer l'aire géométrique du domaine grisé.

Problème 3 (11 points)

On considère trois urnes U_1 , U_2 et U_3 contenant des boules de couleurs différentes.

Dans U_1 , il y a 8 boules noires et 7 boules rouges ;

dans U_2 , 6 boules noires, 14 boules rouges et 5 boules jaunes ;

dans U_3 , 9 boules noires, 6 boules rouges et 5 boules blanches.

- 3.1. En tirant une boule au hasard de chacune des trois urnes :
 - 3.1.1. quelle est la probabilité d'obtenir trois boules de la même couleur ?
 - 3.1.2. on a obtenu une boule blanche, une boule rouge et une boule noire. Quelle est la probabilité que la boule rouge provienne de l'urne U_1 ?
- 3.2. On tire une boule au hasard de l'urne U_3 et on la remet ensuite dans la même urne. On recommence une deuxième fois, une troisième, et ainsi de suite. Combien de fois au minimum faudra-t-il recommencer cette opération pour que la probabilité d'obtenir au moins une boule blanche soit supérieure à 99,9% ?
- 3.3. Combien faut-il rajouter de boules rouges au minimum dans l'urne U_2 pour qu'en tirant successivement et sans remise deux boules de cette urne, la probabilité d'obtenir une boule noire suivie d'une boule jaune soit inférieure à 0,01% ?

Problème 4 (13 points)

Relativement à un repère orthonormé, on donne :

- le cercle Γ d'équation $x^2 + 12x + y^2 - 8y + 48 = 0$,
- les points $M(-4; 8)$ et $P(5; 6)$,
- la droite d d'équation $x - 2y - 2 = 0$.

- 4.1. Déterminer le centre C et le rayon r du cercle Γ , puis vérifier que le point M se situe à l'extérieur du cercle Γ .
- 4.2. Déterminer les équations des tangentes au cercle Γ perpendiculaires à la droite d .
- 4.3. Déterminer l'équation du cercle Γ' centré en P et tangent à la droite d .
- 4.4. Calculer l'aire du triangle OPP' , où P' est le symétrique du point P relativement à la droite d .

Problème 5 (11 points)

On considère l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 muni de la base canonique \mathcal{B} .

Soit $M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -4 & b \\ -6 & a & b \\ -6 & -4 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice d'un endomorphisme h de \mathbb{R}^3 relativement à \mathcal{B} .

- 5.1. Sachant que $v = (1; 1; 1)$ est un vecteur propre de h , calculer a et b .
- 5.2. Si $a = -1$ et $b = -2$, déterminer les valeurs propres de h et les sous-espaces propres associés.

Problème 6 (6 points)

Soit h un endomorphisme de \mathbb{R}^3 et soit $u = (1; 1; 0)$, $v = (0; 1; 1)$ et $w = (1; 2; 3)$ trois vecteurs de \mathbb{R}^3 .

Sachant que le noyau de h est engendré par les vecteurs u et v et que $h(w) = 2w$, donner la matrice de h relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Problème 7 (11 points)

On considère le carré $ABCD$ formé par $A(-2; 2)$, $B(2; 2)$, $C(2; -2)$ et $D(-2; -2)$ ainsi que le point $P(0; 4)$. Soit $Q(m; -2)$, où $-2 \leq m \leq 2$, un point se déplaçant sur le segment CD . Soit R l'intersection des segments PQ et AB .

- 7.1. Faire un dessin de la situation.
- 7.2. Montrer que $R(\frac{m}{3}; 2)$.
- 7.3. Pour quelles coordonnées de Q la somme des aires du triangle ARD et du cercle de centre P et de rayon PR est-elle minimale ?