Département de la formation et de la sécurité
Service de l'enseignement

Departement für Bildung und Sicherheit
Dienststelle für Unterrichtswesen

CANTON DU VALAIS
KANTON WALLIS

Lycée Collège Creusets

Examens de maturité 2014

Mathématiques Fortes	DF	5B - 5C - 5D	Version A

Exercice 1

Soit la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$

1. Faire l'étude complète de la fonction f et construire sa représentation graphique.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -2. L'équation sera écrite à l'aide de puissances de e.
3. Calculer l'aire du domaine limité par la courbe représentative de f, l'axe O_x et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 3$. (Indication : utiliser le développement en série de e^x autour de $x = 0$ pour en déduire les 4 premiers termes d'une série dont $f(x)$ est la somme.)

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, considérons :

les plans $\alpha : 3x - 3y - 5z - 4 = 0$ et $\beta : -2x + y + 3z + 2 = 0$

ainsi que la droite $d : \begin{cases} x = \frac{1}{2} - 5\,k \\ y = -3 - 8\,k \\ z = -3 - 24\,k \end{cases}$, avec $k \in \mathbb{R}$ et le point $H\left(\frac{1}{2}; 3; -6\right)$

1. Écrire les équations paramétriques de la droite d', symétrique de d par rapport au plan α.
2. Calculer, en radians et en degrés, l'angle aigu φ formé par la droite d et le plan α.
3. Déterminer les équations paramétriques de la droite $i = \alpha \cap \beta$.
4. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre H et de rayon $r = \sqrt{56}$. Écrire l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$ puis déterminer le centre K et le rayon r_1 du cercle $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \beta$.
5. Déterminer l'équation cartésienne des plans γ et ε tangents à la sphère $\mathcal{S}$ et parallèles au plan β.

Exercice 3

1. Soit la fonction complexe : $f(z) = z^2 - (i-6)\,z + 28 - 12\,i$

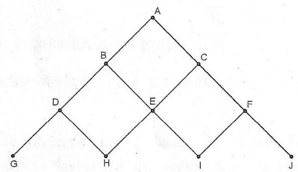
   a. Déterminer les zéros de f.
   b. Déterminer les racines quatrièmes du zéro de f dont la partie réelle est la plus petite.
   c. Dans le plan de Gauss, quels sont les points de la droite $y = x$ dont l'image par f est un réel ?

2. Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y' + 29y = -42\,\sin(2x) - 41\,\cos(2x)$$

Exercice 4

Une bille lâchée en A tombe en suivant les lignes du réseau ci-contre.
À chaque intersection, elle a une probabilité de 2/3 de partir à <u>sa</u> droite - par exemple, si elle arrive en E, elle ira en H avec une probabilité de 2/3 et donc en I avec une probabilité de 1/3.
Une bille aboutissant en G ou en J rapporte 1 franc, en H 2 francs et en I 3 francs.



1. Calculer la probabilité qu'une bille rapporte respectivement 1 franc, 2 francs et 3 francs.
2. Calculer la probabilité qu'une bille soit passée par B si elle rapporte plus de 1 franc.
3. En lançant trois billes, quelle est la probabilité de gagner exactement 5 francs ?
4. Pour lancer une bille, on doit miser 1.80 francs. Ce jeu est-il avantageux ?
5. Considérons maintenant qu'une bille a une probabilité p de partir à sa droite à chaque intersection. Quelle valeur de p maximise la probabilité de gagner 3 francs en un lancer ? Quelle est alors cette probabilité ?

FIN

Bon travail !