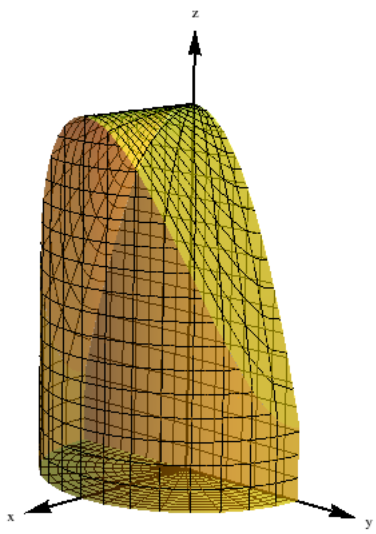
Application des maths

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire • PC avec `Mathematica`
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Problème 1 (18 points)

Considérons le solide représenté ci-dessous qui est délimité par les surfaces d'équation $x = 0$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$ et $z = 5 - y^2$.



1.1 Sur ce solide, tracez en rouge, avec `Mathematica`, l'arête qui est à l'intersection entre les deux surfaces courbes.

1.2 Calculez la valeur exacte – à l'aide d'une intégrale – et une approximation de la longueur de cette arête.

Pour les calculs suivants, vous avez le choix entre la valeur exacte (en utilisant des intégrales) ou une approximation.

1.3 Calculez l'aire du couvercle.

1.4 Calculez le volume de ce solide.

1.5 Calculez les coordonnées du centre de gravité de ce solide.

Problème 2 (10 points)

Genève est à 46˚12′ de latitude Nord et à 6˚14′ de longitude Est. Tokyo est à 35˚40′ de latitude Nord et à 139˚46′ de longitude Est.

Un avion décolle de Genève pour aller à Tokyo en suivant la route la plus courte appelée ≪*orthodromie*≫.

2.1 Calculez la longueur de cette orthodromie en considérant que le rayon terrestre moyen est de 6 371 km.

2.2 Quelle est la latitude maximale à laquelle l'avion va se trouver au cours de son vol ?

Problème 3 (15 points)

On veut établir une cubique de Bézier qui ressemble le plus possible à un quart de cercle. Pour cela, on utilise les quatre points de contrôle $(0; 1)$, $(k; 1)$, $(1; k)$ et $(1; 0)$ avec k, un paramètre réel compris entre 0 et 1.

Le point M qui parcourt la cubique de Bézier a pour vecteur-repère $\vec{r}_k(t)$:

$$\vec{r}_k(t) = (1-t)^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 3(1-t)^2 t \begin{pmatrix} k \\ 1 \end{pmatrix} + 3(1-t)t^2 \begin{pmatrix} 1 \\ k \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.1 Avec `Manipulate`, animez cette cubique avec ses points de contrôle, en faisant varier k de 0 à 1. Si vous représentez le quart de cercle, vous pouvez utiliser cette animation pour estimer la valeur de k.

3.2 Déterminez le paramètre k pour que la courbe de Bézier passe par le point $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3.3 Déterminez le paramètre k pour que la courbe de Bézier délimite avec l'axe des abscisses une surface de même aire que le quart de disque.

Problème 4 **(17 points)**

Un biologiste s'est intéressé à l'évolution de la population de flétans présents dans le Golfe du Saint-Laurent. Les données du tableau ci-dessous représentent la biomasse b (masse totale de l'ensemble de la population mesurée en tonnes) en fonction du temps t mesuré en années.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
b	15	29	45	76	104	168	226	298	332	369	386	394	389	397	395

En général, une population croît exponentiellement au début, puis se stabilise petit à petit et tend vers sa capacité maximale pour cause de ressources limitées.

Le modèle le plus simple qui modélise ces comportements est le modèle logistique qui vérifie l'équation différentielle

$$b'(t) = k\, b(t) \left(1 - \frac{b(t)}{m}\right) \tag{1}$$

où m est la capacité maximale et k le taux de croissance relatif lorsque b est très inférieur à la capacité maximale (en effet, $k \to \frac{b'}{b}$ lorsque $\frac{b}{m} \to 0$).

4.1 Vérifiez qu'avec la condition initiale $b(0) = 15$, la solution de l'équation différentielle (1) est

$$b(t) = \frac{15\, e^{kt}\, m}{15\, e^{kt} - 15 + m}$$

4.2 La solution dépend des deux paramètres k et m. Déterminez-les en utilisant les données récoltées par notre biologiste et la méthode des moindres carrés.

— Pour déterminer la valeur de k, vous vous baserez sur les quatre premières mesures du tableau :

t	0	1	2	3
b	15	29	45	76

et supposerez que pour ces valeurs, la croissance est exponentielle, c'est-à-dire que $b(t) = 15\, e^{k\, t}$.

— Connaissant la valeur de k, vous pourrez déterminer la valeur de m dans $b(t) = \dfrac{15\, e^{kt}\, m}{15\, e^{kt} - 15 + m}$ en vous basant sur l'ensemble des données expérimentales.

Dans un même système d'axes, représentez ensuite les données et, en rouge, la courbe de la fonction b obtenue.

4.3 Pour cette partie, prenez $k = 0{,}6$ et $m = 400$. On peut également utiliser la méthode d'Euler pour représenter l'évolution de la biomasse b.

Appliquez cette méthode à partir de l'équation différentielle (1) et de la condition initiale $b(0) = 15$, en faisant varier t de 0 à 14, par pas Δt de 0,1.

Dans un même système d'axes, représentez le champ de directions, les données et, en rouge, la solution obtenue par la méthode d'Euler.