Tous les problèmes ont le même poids pour le calcul de la note.

Problème 1

La courbe c_1 est l'arc de Bézier défini par les points $P_0(0;0), P_1(1;0), P_2(0;6)$ et $P_3(-3;0)$.

On rappelle que l'équation de la courbe est

$$\overrightarrow{OP}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = (1-t)^3 \cdot \overrightarrow{OP_0} + 3 \cdot (1-t)^2 \cdot t \cdot \overrightarrow{OP_1} + 3 \cdot (1-t) \cdot t^2 \cdot \overrightarrow{OP_2} + t^3 \cdot \overrightarrow{OP_3}$$

avec $t \in [0;1]$.

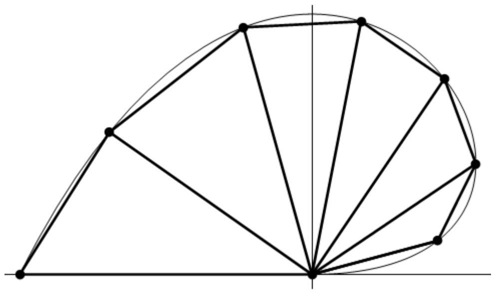
a) Calculer les coordonnées des points à tangente horizontale et du point à tangente verticale de c_1.

b) Esquisser la courbe c_1.

La courbe c_k est l'arc de Bézier défini par les points $P_0(0;0), P_1(k;0), P_2(0;6)$ et $P_3(-3;0)$.

c) Sans calcul supplémentaire, esquisser la courbe c_9.

On souhaite estimer l'aire $A(k)$ de la surface fermée limitée par la courbe c_k et l'axe Ox.
Pour cela, on utilise une triangulation de la surface. La figure ci-dessous illustre une triangulation.



Pour calculer l'aire d'un triangle de sommets $O(0;0), A(a_1;a_2), B(b_1;b_2)$, on peut utiliser la formule : Aire $= \frac{1}{2}|a_1 b_2 - b_1 a_2|$.

d) Écrire un programme qui estime $A(k)$ au moyen de 1024 triangles.

Pour une valeur de k plus grande que 1, la surface fermée limitée par la courbe et l'axe Ox est partagée par l'axe y en deux parties dont les aires sont égales.

e) Compléter le programme afin qu'il estime au $1/1024$ près cette valeur de k.

Problème 2

On considère l'équation différentielle du premier ordre $y' = \frac{2y}{x}$ et on appelle s la solution qui satisfait la condition $s(1) = 1$.
On se propose de comparer les résultats obtenus par les méthodes d'Euler et de Runge pour la résolution de cette équation.

a) Vérifier que $s(x) = x^2$.

b) Calculer deux estimations de $s(3)$, la première en employant la méthode d'Euler avec un pas $h = 1$ et la deuxième en employant la méthode de Runge avec un pas $h = 2$.
Avec quelle méthode obtient-on le résultat le plus précis ?

c) Écrire un programme qui calcule une estimation de $s(3)$ en employant la méthode de Runge avec un pas $h = \frac{1}{32}$.

d) Compléter le programme pour qu'il détermine un autre pas avec lequel la méthode d'Euler fournit une meilleure estimation de $s(3)$ que celle obtenue à la question précédente.

Problème 3

Problème de mathématiques financières, pour lequel on rappelle la formule ci-dessous.

Capital acquis par des versements réguliers

$$A_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

où A_n est le capital acquis à la fin de la $n^{ème}$ année, n le nombre de versements réalisés au début de chaque année et a le montant des versements.

De plus, $r = 1 + t$ où t est le taux d'intérêt annuel.

****

Le premier janvier de chaque année on verse 1'000 francs sur un compte. On s'intéresse au capital acquis à la fin de la 9ème année, on note ce capital A_9.

a) Calculer ce capital acquis si le taux d'intérêt annuel est de 1%.
Calculer ce capital acquis si le taux d'intérêt annuel est de 3%.

Dans les questions suivantes, on aimerait déterminer, par diverses méthodes, une estimation du taux d'intérêt annuel afin que le capital acquis soit de 10'000 francs.

b) En employant les résultats de la première question, estimer le taux recherché par une interpolation linéaire.

c) Employer la méthode de la bissection pour trouver un intervalle de longueur égale à un quart de pourcent et contenant le taux recherché.
On demande le détail des calculs.

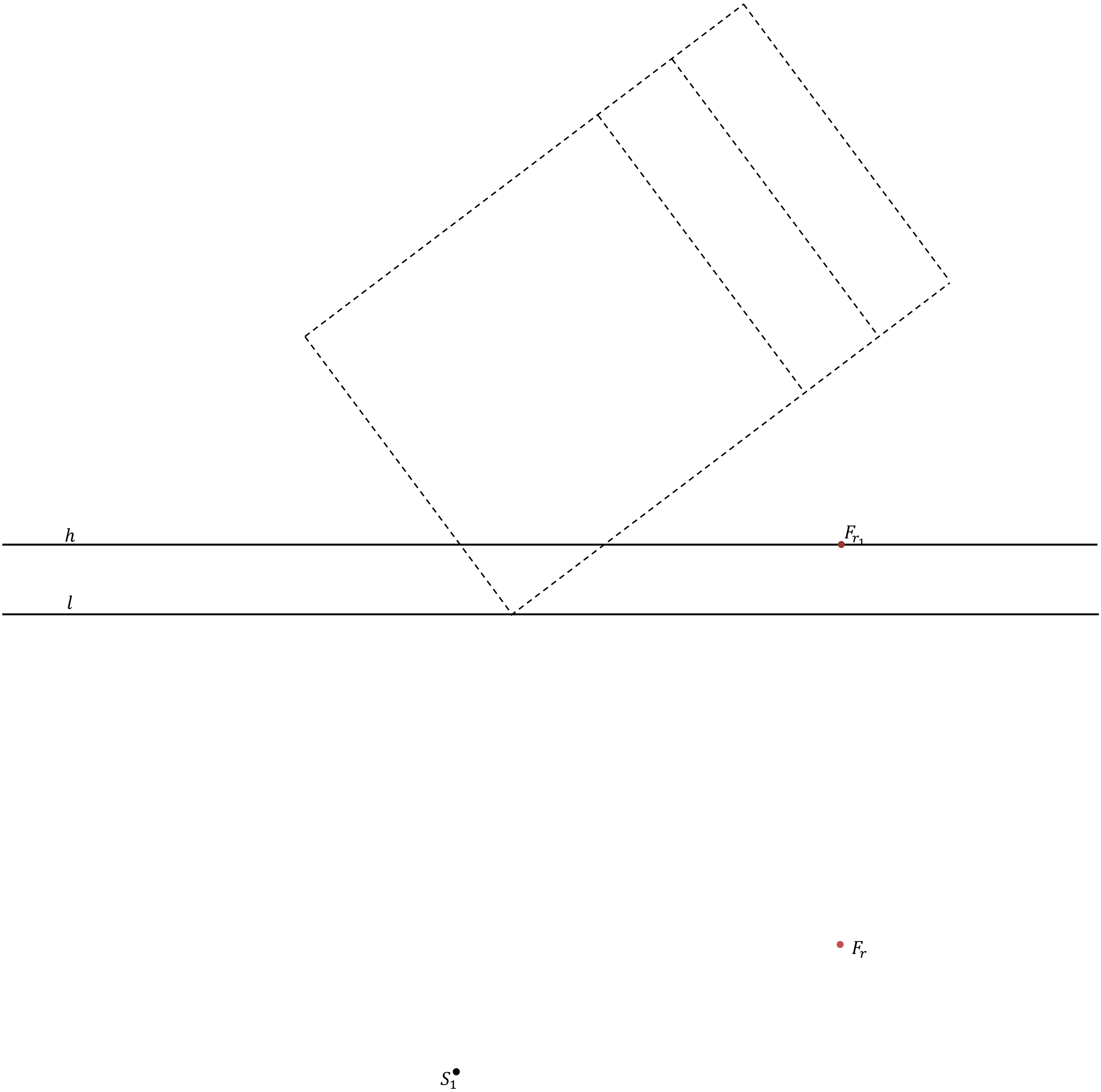
d) Employer la méthode de Newton avec une seule itération et une valeur initiale de 2% pour estimer le taux recherché.
Avant d'appliquer la méthode de Newton à l'équation $A_9 = 10'000$, transformer cette équation en la mettant sous forme d'une équation polynomiale de degré 10 dans laquelle l'inconnue est r.

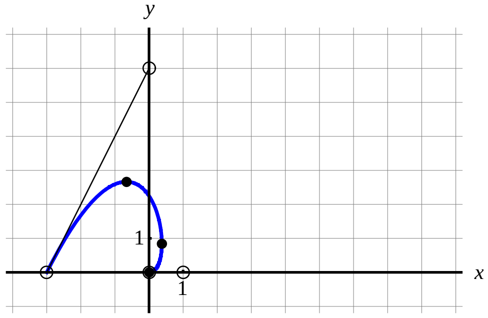
Problème 4

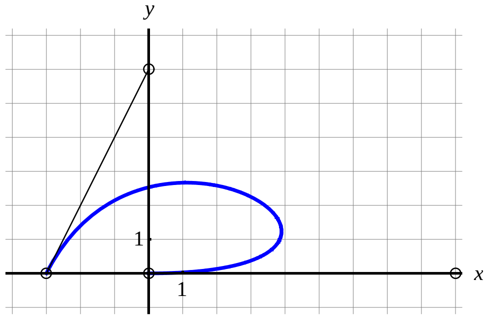
À Marseille, la "Villa Méditerranée", centre international pour le dialogue et les échanges en Méditerranée, possède une architecture étonnante.

Construire la perspective d'une maquette de ce bâtiment donnée par sa projection dans le sol, la hauteur totale étant de 3,5 cm et l'épaisseur du "toit" de 1 cm.

Cette maquette est éclairée par des rayons lumineux dont la direction est donnée par le point de fuite F_r .
Construire la perspective de l'ombre de la maquette sur le sol et colorier la partie éclairée de la maquette.
Tracer en rouge les parties d'arêtes visibles qui portent une ombre sur le sol.







Problème 1

a) Les équations paramétriques de c_1 sont

$$\begin{cases} x(t) = 3t - 6t^2 \\ y(t) = 18t^2 - 18t^3 \end{cases}$$

Point à tangente horizontale :
$(0; 0)$ pour $t = 0$ et $(-2/3\,; 8/3)$ pour $t = 2/3$
Point à tangente verticale :
$(3/8\,; 27/32) = (0.375; 0.84375)$ pour $t = 1/4$

b,c) Dessin

d) e) On a c_k: $\begin{cases} x = 3k(1-t)^2t - 3t^3 \\ y = 18(1-t)t^2 \end{cases}$

Programme de d)

```
Dim k As Double
Function x(t)
x = 3*k*(1 - t)^2*t - 3*t^3
End Function
Function y(t)
y = 18*(1 - t)*t^2
End Function

Private Sub Command1_Click()
A = 0
dt = 1 / 1024
For t = 0 To 1 - 1 / 1024 Step 1 /
    1024
     dA = Abs(0.5*(x(t)*y(t + dt) -
    y(t)*x(t + dt)))
     A = A + dA
Next t
End Sub
```

Programme de f)

```
Dim k As Double
Function x(t)
x = 3*k*(1 - t)^2*t - 3*t^3
End Function

Function y(t)
y = 18*(1 - t)*t^2
End Function

Private Sub Command1_Click()
k = 1 - 1/1024
Do
   k = k + 1/1024
   'Calcul de l'aire totale
   A = 0
   dt = 1 / 1024
   For t = 0 To 1-1/1024 Step
   1/1024
     dA = Abs(0.5*(x(t)*y(t + dt) -
   y(t)*x(t + dt)))
     A = A + dA
   Next t
   'Calcul de l'aire à droite de
   l'axe y
   B = 0
   t = -dt
   Do
      t = t + dt
      dB = Abs(0.5*(x(t)*y(t + dt)
   - y(t)*x(t + dt)))
      B = B + dB
   Loop Until x(t + dt) <= 0
Loop Until B >= A / 2
Label1.Caption = k
End Sub
```

On obtient $k = 5{,}689$

Problème 2

a) $y = x^2 \implies y' = 2x = \frac{2x^2}{x}$ et $1^2 = 1$.

b) Euler avec $h = 1$:
$x_0 = 1, y_0 = 1, y'(x_0, y_0) = 2,$
$x_1 = 2, y_1 = 3, y'(x_1, y_1) = 3,$
$x_2 = 3, y_2 = 6.$

Runge avec $h = 2$:
$x_0 = 1, y_0 = 1, y'(x_0, y_0) = 2, x_m = 2, y_m = 3, , y'(x_m, y_m) = 3,$
$x_1 = 3, y_1 = 1 + 6 = 7.$

Runge est plus précis qu'Euler puisque $s(3) = 9$.

c)
```
Private Sub Command3_Click()
Let x0 = 1
Let y0 = 1
Let h = 1/32
Let n = 64
For i = 1 To n
   Let xm = x0 + h/2
  Let ym = y0 + (h/2)*2*y0/x0
   Let x1 = x0 + h
   Let y1 = y0 + h*2*ym/xm
   Let x0 = x1
   Let y0 = y1
Next i
Let Label9.Caption = y1
```

d)
```
Let delta_R = Abs(9 - y1)
Do
 Let x0 = 1
 Let y0 = 1
 Let h = h/2
 Let n = n*2
 For i = 1 To n
     Let x1 = x0 + h
     Let y1 = y0 + h*2*y0/x0
     Let x0 = x1
     Let y0 = y1
  Next i
  Let delta_E = Abs(9 - y1)
Loop Until delta_E <= delta_R
Let Label7.Caption = y1
Let Label5.Caption = "h = 1/" & 1/h
End Sub
```

On obtient h = 1 / 4096

Problème 3

Dans la formule $A_n = a \cdot r \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ on a les valeurs $a = 1000$ et $n = 9$.

a)

Taux	r	Capital acquis
1.00%	1.01	9462.21
3.00%	1.03	10463.88

b) $t = 1 + \frac{2}{10464 - 9462} \cdot (10000 - 9462) \cong 2{,}073\%$.

c)

Taux	r	Capital acquis
1.00%	1.01	9462.21
3.00%	1.03	10463.88
2.00%	1.02	9949.72
2.50%	1.025	10203.38
2.25%	1.0225	10075.71

Le taux cherché est donc compris entre 2% et 2,25%.

d) $C_9 = 10'000 \Leftrightarrow 1000 \cdot r \cdot \frac{r^9 - 1}{r - 1} = 10'000 \Leftrightarrow r \cdot (r^9 - 1) = 10 \cdot (r - 1)$ ou encore $r^{10} - 11r + 10 = 0$.

On donc $f(r) = r^{10} - 11r + 10$ et $f'(r) = 10r^9 - 11$, d'où on déduit la fonction de Newton

$N(r) = r - \frac{r^{10} - 11r + 10}{10r^9 - 11} = \frac{9r^{10} - 10}{10r^9 - 11}$

On obtient $N(1.02) = 1.0211$ ce qui signifie que l'estimation pour le taux annuel est de 2,11%.

Problème 4