PARTIE MATHEMATIQUE (2/3 de l'épreuve)

FORMULAIRE :

Moindres carrés (méthode matricielle) : $\vec{v} = ({}^tM \cdot M)^{-1} \cdot ({}^tM \cdot \vec{y})$

Problème 1 (10 points / 61)

Une balle de masse m est jetée en l'air perpendiculairement à la surface de la terre à partir d'une certaine hauteur au-dessus du sol. Le tableau ci-dessous donne la distance en mètres de la balle au-dessus du sol après t secondes :

Temps [sec]	1	2	4	5
Distance [m]	25	37.5	32.5	15.6

1.1 Déterminer la distance en fonction du temps à l'aide d'une fonction qui ajuste ces données.

1.2 De quelle hauteur a-t-on lancé la balle ?

1.3 Quelle était la vitesse à laquelle la balle a été lancée ?

1.4 Quelle est la hauteur maximale atteinte par la balle ?

1.5 Quand la balle retombera-t-elle sur le sol ?

Problème 2 (10 points / 61)

Une loi due à Newton affirme qu'un corps de température $T(t)$, situé dans un environnement de température constante T_E, inférieure à celle du corps, a une vitesse de refroidissement proportionnelle à la différence entre ces deux températures.

2.1 En prenant $T_0 = T(0)$, déterminer l'expression de $T(t)$ en fonction du temps.

2.2 De l'eau est portée à ébullition à 100°C dans un local dont la température est maintenue à 18°C. On coupe l'apport d'énergie et on laisse le liquide se refroidir. On constate qu'après 5 minutes, la température du liquide est de 70°C. Déterminer la vitesse de refroidissement (en °C) au début du processus.

2.3 Après combien de temps, la température du liquide sera-t-elle 2 degrés au-dessus de la température du local ?

Problème 3 (7 points / 61)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 6y' + 13y = 26x - 1 \quad , \quad \text{avec} \quad y(0) = 5 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1.$$

Problème 4 (10 points / 61)

On donne la fonction $f(x) = 4x^3 + 7x^2 - 10x - 18$.

4.1 Combien de zéros cette fonction admet-elle ? Justifier entièrement votre réponse.

4.2 Calculer, au millième près, un zéro de f à l'aide de la méthode de Newton.

4.3 Déterminer deux exclus de Newton de la fonction f.

4.4 Poser les calculs permettant de déterminer un troisième exclu de Newton, sans les faire.

Problème 5 (10 points / 61)

On donne la fonction $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$.

5.1 Calculer, à l'aide de la définition, le développement en série de MacLaurin de f d'ordre 5.

5.2 Ecrire le terme d'ordre n de la série précédente, puis montrer que son rayon de convergence vaut 1.

5.3 Déterminer x pour que $\sqrt[5]{33} = 2\sqrt[5]{1+x}$.

5.4 A l'aide de la série calculée précédemment, déterminer une valeur approchée de $\sqrt[5]{33}$ au dix-millième près.

Problème 6 (7 points / 61)

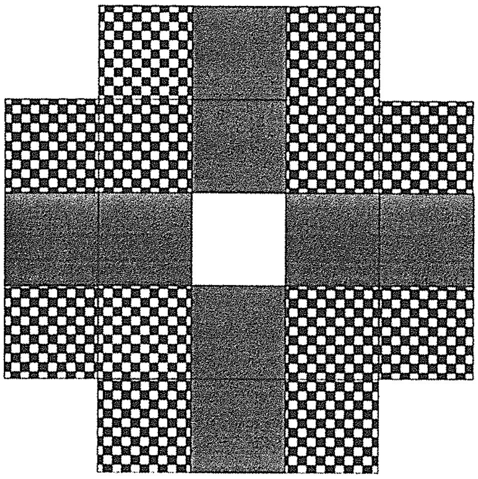
Un moniteur de télévision (allumé en permanence) indiquant l'état des vols dans un aéroport tombe en panne en moyenne après 20'000 heures d'utilisation. On peut considérer que le temps d'utilisation avant la première panne suit une loi exponentielle. Le fabricant offre un an de garantie; il lui coûte 300 francs pour fabriquer l'appareil et 150 francs pour le réparer. Par ailleurs il le vend 400 francs.

6.1 Calculer le profit moyen que le fabricant retire.

6.2 Jusqu'à quelle limite le fabricant pourrait-il étendre la garantie sans perdre d'argent?

Problème 7 (7 points / 61)

Une cible a la forme ci-dessous (21 carrés au total).



Un joueur doit tirer une fléchette :

- s'il atteint un carré en damier, il doit payer 3 francs;
- s'il atteint un carré gris, il reçoit 2 francs;
- s'il atteint le carré central (blanc), il reçoit 10 francs;
- s'il n'atteint aucun carré, aucun argent n'est échangé et il rejoue jusqu'à ce qu'il atteigne un carré.

7.1 Le jeu est-il favorable au joueur?

7.2 Est-il possible, en changeant un seul des montants que le joueur reçoit ou doit payer, de rendre ce jeu équitable? Le montant doit pouvoir alors être exprimé à l'aide de pièces de 5 centimes au minimum. Donner toutes les solutions.