

**Examens de maturité gymnasiale  
à l'École de Maturité**

**Juin 2014**

**OSPM Partie APPLICATIONS DES MATHÉMATIQUES**

**3M**

Durée : 240 minutes pour la totalité de l'épreuve d'OS Physique et applications des mathématiques

Matériel autorisé : formulaires et tables CRM sans annotation (marque-pages et formules surlignées autorisés), calculatrice sans écran graphique, ne permettant pas le calcul formel, la résolution automatique d'équations, le calcul intégral ou le calcul matriciel.

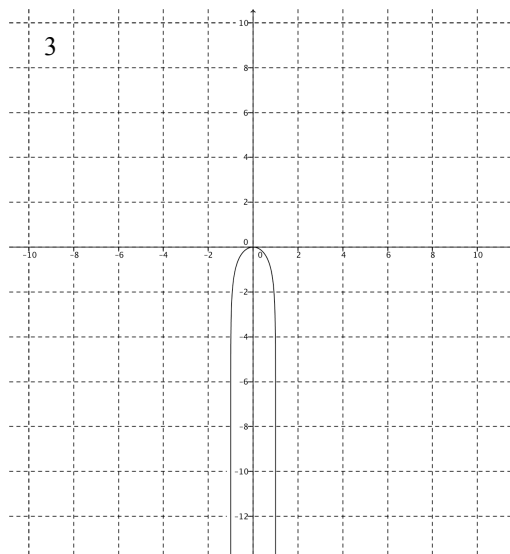
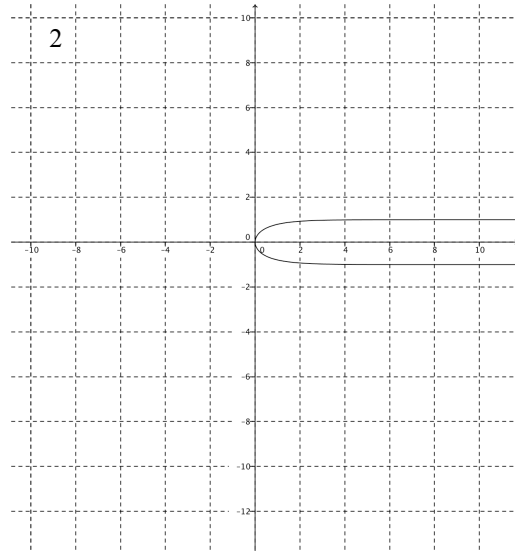
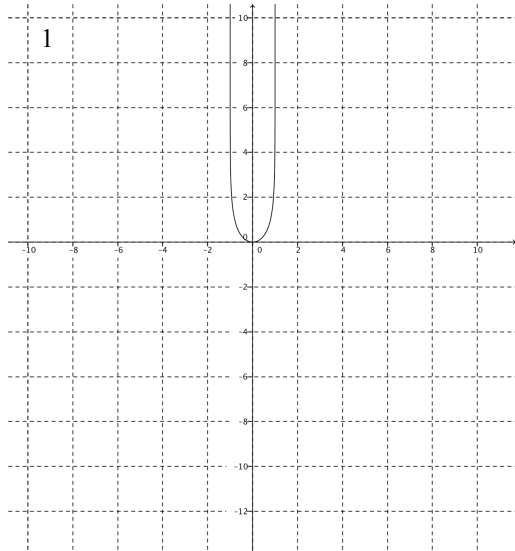
**Consignes :**

1. Le candidat met son nom sur toutes les feuilles, y compris celles de brouillon.
2. Les points attribués à chaque problème sont indiqués entre parenthèses à droite du n° du problème.
3. Après avoir si nécessaire travaillé sur un brouillon, le candidat rédige à l'encre les solutions sur les feuilles officielles.  
La rédaction doit être soignée.  
Les calculs et les raisonnements doivent être détaillés.  
Les feuilles de brouillon sont jointes aux feuilles officielles mais ne seront pas corrigées.
4. Ne pas mélanger les feuilles des deux épreuves (aussi valable pour les feuilles de brouillon).

**Problème 1 (11 points)**

On considère la courbe  $C$  d'équation paramétrique  $\begin{cases} x = t \\ y = \ln(1-t^2) \end{cases}$ ,  $t \in ]-1;1[$ .

- (a) L'une des courbes représentées ci-dessous correspond à  $C$ .  
Déterminer de laquelle il s'agit (*justifier votre réponse*) et proposer une équation pour chacune des deux autres.



- (b) Calculer la longueur de l'arc de  $C$  obtenu pour  $t$  variant entre 0 et  $\frac{1}{2}$ .

**Problème 2 (8 points)**

Une compagnie d'assurance a instauré une formule de primes basées sur les sinistres enregistrés de ses clients. Il y a trois classes de tarif, numérotées I, II et III.

Si aucun accident ne s'est produit durant l'année, l'assuré baisse d'une classe de tarif (ou reste à la classe I, classe la plus avantageuse).

Si l'assuré a eu un ou plusieurs accidents, il remonte à la classe III (ou y reste, classe la moins avantageuse).

Les statistiques montrent que la probabilité d'avoir un ou plusieurs sinistres au cours d'une année est de 10%.

- (a) Établir le diagramme de transition d'une chaîne de Markov décrivant cette situation et donner la matrice de transition.
- (b) Si les primes sont fixées à CHF 40.- pour la classe I, à CHF 60.- pour la classe II et à CHF 100.- pour la classe III, quelle sera la prime moyenne à long terme ?

**Problème 3 (9 points)**

Un grossiste en café tient à respecter sa publicité qui annonce que le 80% au moins de ses produits est issu du commerce équitable.

Pour l'année à venir, il estime à un maximum de 10 tonnes la quantité de café qu'il pourra écouler.

Il dispose de trois fournisseurs dont les caractéristiques (quantité de café disponible, pourcentage de la production provenant du commerce équitable, prix demandé et frais de livraison) sont données dans le tableau suivant :

	Quantité de café disponible (en tonnes)	Pourcentage de la production provenant du commerce équitable	Prix demandé (en milliers de francs par tonne)	Frais de livraison (en milliers de francs par tonne)
Fournisseur 1	25	30%	11'500	500
Fournisseur 2	6	60%	13'500	500
Fournisseur 3	4	100%	14'400	600

Sachant que son prix de vente est de 20'000 francs par tonne, comment ce grossiste doit-il s'approvisionner pour obtenir le bénéfice maximal ?

**Problème 4 (8 points)**

Soit l'équation différentielle  $y' + 2y = xe^{-x}$  (\*)

- (a) Déterminer deux nombres  $a$  et  $b$  tels que  $y = (ax + b)e^{-x}$  soit une solution particulière de l'équation (\*).
- (b) Résoudre l'équation (\*) et déterminer la solution qui satisfait à la condition initiale  $y(0) = 0$ .