Problème 1 (poids 2)

On considère la fonction $f : x \longmapsto y = \dfrac{5x}{x^2+4}$.

a) La droite d'équation $y = 1$ coupe le graphe de f en deux points. Déterminer les abscisses de ces points.

b) Étudier la fonction f (domaine de définition, parité, point(s) d'intersection avec les axes, équation de l'asymptote, coordonnées des points à tangente horizontale, graphe en prenant 2 carreaux pour une unité).

On considère la fonction g dont le graphe est symétrique au graphe de f par rapport à la droite $y = 1$.

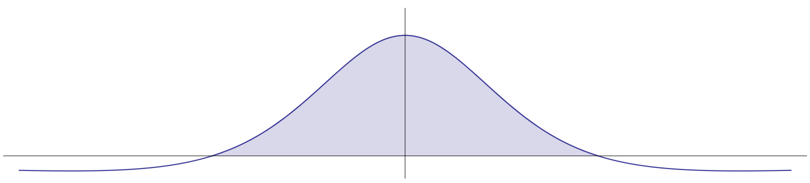
c) Avec une autre couleur, dessiner le graphe de g dans le même système d'axes que le graphe de f.

d) Donner les coordonnées des points à tangente horizontale du graphe de la fonction g.

e) Trouver la valeur de k telle que $F(x) = k \cdot \ln(x^2+4)$ soit une primitive de $f(x)$.

f) Calculer l'aire de la surface fermée délimitée par les graphes de f et de g.

g) On a représenté ci-dessous le graphe de la fonction f', dérivée de f. Calculer l'aire de la surface grise.



Problème 2 (poids 2)

Pour les dessins de ce problème, utiliser la feuille annexée (page 4). Employer différentes couleurs et dessiner les parties invisibles en traitillé.

La droite a passe par $A(2;3;3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
La droite b est parallèle à a et passe par $B(4;2;0)$.

a) Dessiner soigneusement les droites a et b, ainsi que les traces du plan π contenant ces deux droites.

b) Déterminer l'angle aigu formé par la droite a et le mur.

c) Trouver un vecteur normal du plan π contenant les droites a et b, puis déterminer l'équation cartésienne du plan π' qui contient la droite a et est perpendiculaire à π.

d) Calculer la distance la plus courte entre les droites a et b.

On donne la sphère $\mathcal{S}$ centrée en B et de rayon $R = \sqrt{14}$.

e) Quelle est la position relative de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite a ?

f) Vérifier que le point A est sur la sphère $\mathcal{S}$, puis donner une représentation paramétrique de la droite t, tangente à $\mathcal{S}$ en A et perpendiculaire à a.

g) Déterminer les centres des sphères de rayon 3, centrées sur b et tangentes au sol.

h) Le triangle BCD est rectangle en B. Le sommet C se trouve sur la droite a, et le sommet D sur la droite b à distance 6 de B (il est utile de faire un schéma de la situation !).

Combien de possibilités y a-t-il pour C ? Et pour D ?

Calculer les coordonnées des points C et D (toutes les possibilités).

Problème 3 (poids 1)

Antoine a téléchargé une nouvelle application sur son smartphone. Il s'agit d'un jeu de culture générale. Il faut répondre à des questions en choisissant la bonne réponse parmi 4 réponses proposées.

Comme Antoine est doté d'une bonne culture générale, il a une probabilité $p = \frac{3}{5}$ de répondre correctement à chaque question.

Première partie du problème : Antoine s'amuse seul sur son smartphone.

a) Sur un total de 6 questions, quelle est la probabilité qu'Antoine donne d'abord 2 réponses fausses, puis 4 réponses correctes ?

b) Sur un total de 6 questions, quelle est la probabilité qu'Antoine donne au moins 5 réponses correctes ?

c) Sachant qu'Antoine a donné au moins 5 réponses correctes sur 6 questions, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas fait d'erreur ?

d) À combien de questions au minimum Antoine doit-il répondre pour que la probabilité qu'il fasse au moins une erreur soit supérieure à 96% ?

e) Antoine décide de répondre à des questions jusqu'à ce qu'il se trompe. Il arrête alors sa partie. Quelle est la probabilité qu'il réponde
1) à exactement 4 questions ? 2) à plus de 4 questions ?

Deuxième partie du problème : Antoine affronte sa petite soeur Zoé. Dans ce duel, deux questions sont posées à chaque adversaire. Chaque réponse correcte apporte un point.

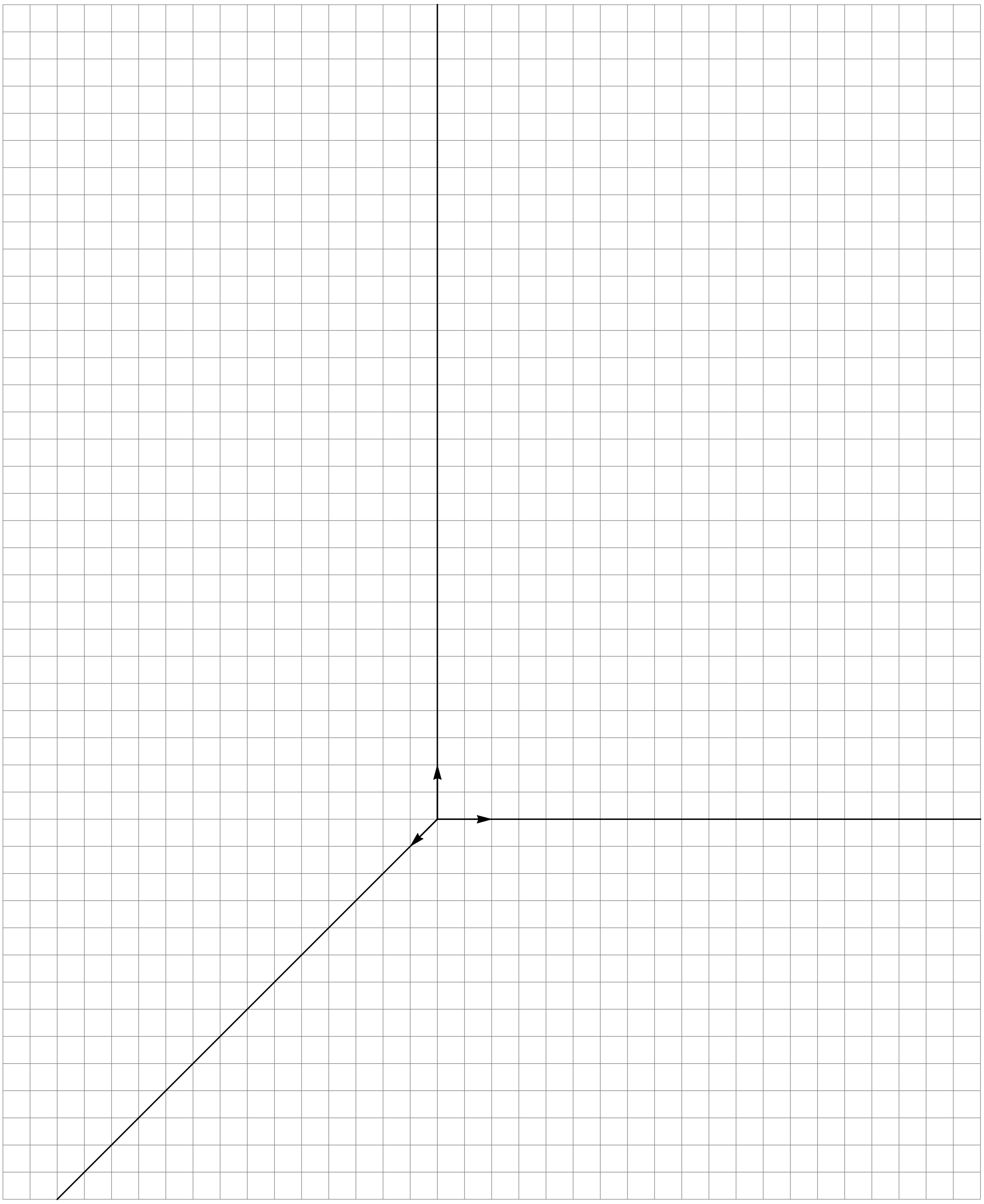
- Pour chaque question, Antoine a toujours une probabilité $p_A = \frac{3}{5}$ de répondre correctement.
- Zoé, ne sachant pas encore lire, répond au hasard : pour chaque question, elle a donc une probabilité $p_Z = \frac{1}{4}$ de répondre correctement.

f) Quelle est la probabilité que le duel entre Antoine et Zoé finisse sur un score de 1 à 1 ?

g) Quelle est la probabilité que le duel entre Antoine et Zoé se termine par un match nul ?

Nom et prénom : **Classe :**

Annexe pour le problème 2

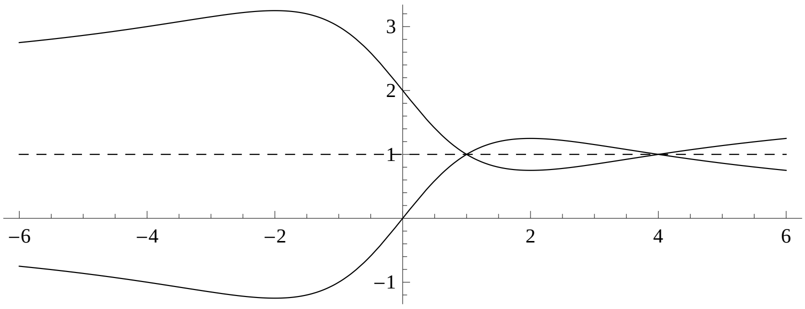


Problème 1

a) $f(x) = 1 \implies x^2 - 5x + 4 = 0 \implies x_1 = 1$ et $x_2 = 4$.

b) $D = \mathbb{R}$, impaire, $(0;0)$, asymptote horizontale d'équation $y = 0$, $f'(x) = \frac{20-5x^2}{(x^2+4)^2} = \frac{5(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}$, pts à tangente horizontale $H_{1,2}(\pm 2; \pm\frac{5}{4})$.

b) et c)



d) $(2; \frac{3}{4})$ et $(-2; \frac{13}{4})$.

e) $F'(x) = k \cdot \frac{2x}{x^2+4} = f(x) \Longrightarrow k = \frac{5}{2}$.

f) $A = 2 \cdot \int_1^4 (f(x) - 1)dx = 2 \cdot \left[\frac{5}{2} \ln(x^2+4) - x\right]_1^4$
$= 5\ln(20) - 8 - 5\ln(5) + 2 = 5\ln(4) - 6 \cong 0,931$.

g) $A = \int_{-2}^{2} f'(x)dx = 2 \cdot \int_0^2 f'(x)dx = 2(f(2) - f(0)) = \frac{5}{2}$.

Problème 2

a) $$a : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 3 - 2\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \implies M_a(0;5;4),\ P_a(5;0;\tfrac{3}{2}) \text{ et } S_a(8;-3;0)\,;$$

$$b : \begin{cases} x = 4 + 2\mu \\ y = 2 - 2\mu \\ z = -\mu \end{cases} \implies M_b(0;6;2),\ P_b(6;0;-1) \text{ et } S_b(4;2;0).$$

b) $\vec{n}_{\text{mur}} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \implies \vec{a} \bullet \vec{n}_{\text{mur}} = 2 = \|\vec{a}\| \cos(\psi)$, d'où $\cos(\psi) = \frac{2}{3}$ et $\varphi = 90° - \psi \cong 41,81°$.

c) $\vec{n}_\pi = \vec{a} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix}$;

$\vec{n}_{\pi'} \mathbin{/\!/} \vec{a} \wedge \vec{n}_\pi = \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-9\\18\end{pmatrix}$, prenons $\vec{n}_{\pi'} = \begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$.

Comme π' passe par $A(2;3;3)$, on obtient $\pi' : y - 2z + 3 = 0$.

d) $\delta = \delta(A;b) = \delta(B;a) = \frac{\|\vec{a} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\vec{a}\|} = \frac{\sqrt{45}}{3} = \sqrt{5}$.

e) $\delta(B;a) = \sqrt{5} < \sqrt{14} = R$, la droite a coupe donc la sphère $\mathcal{S}$ en deux points.

f) $\|\overrightarrow{AB}\| = \left\| \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{14} = R$, donc $A \in \mathcal{S}$;

$$\vec{t} \mathbin{/\!/} \vec{a} \wedge \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} \implies t : \begin{cases} x = 2 + 5\nu \\ y = 3 + 4\nu \\ z = 3 + 2\nu \end{cases}.$$

g) $M(x;y;\pm 3) \in b \implies \mu = \pm 3$, d'où $M_1(-2;8;3)$ et $M_2(10;-4;-3)$.

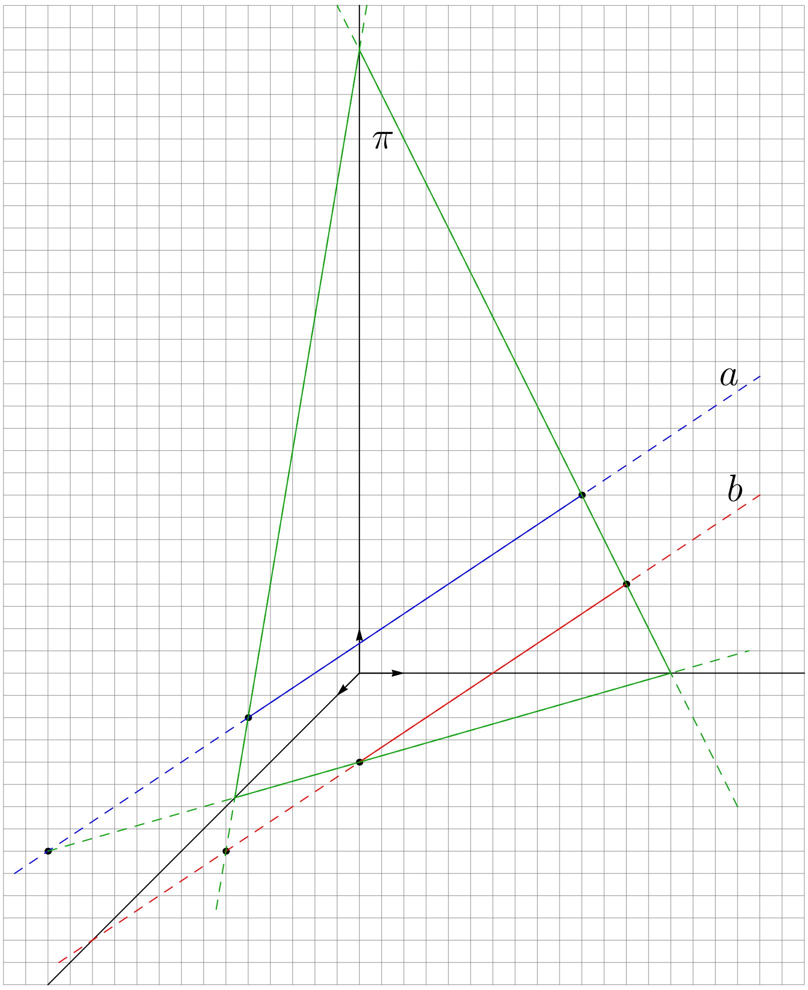
h) Il y a une possibilité pour C et deux pour D :

$\diamond$ $C \in \beta$, où $\beta \perp b$ par B : on a $\beta : 2x - 2y - z - 4 = 0$;
C est à l'intersection de a et de β : $\lambda = 1$, donc $C(4;1;2)$.

$\diamond$ Comme $\overrightarrow{BD} \mathbin{/\!/} \vec{a}$ et $\|\overrightarrow{BD}\| = 6$, on a $\overrightarrow{BD} = \pm 2\vec{a}$, et donc $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}4\\2\\0\end{pmatrix} \pm 2 \begin{pmatrix}2\\-2\\-1\end{pmatrix}$, ce qui mène aux deux points $D_1(8;-2;-2)$ et $D_2(0;6;2)$.

(Variantes : $D \in \mathcal{S}'$, avec $\mathcal{S}'$ centrée en B et de rayon 6,
ou encore $\delta(D;\beta) = 6$ ...)

Problème 2 - dessin



Problème 3

a) $\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{324}{15625} \cong 2,07\%$.

b) $\left(\frac{3}{5}\right)^6 + 6\cdot\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{3^6}{5^5} = \frac{729}{3125} \cong 23,33\%$.

c) $\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^6}{\frac{3^6}{5^5}} = \frac{1}{5} = 20\%$.

d) $1-\left(\frac{3}{5}\right)^n > 0,96 \implies \left(\frac{3}{5}\right)^n < 0,04 \implies n > \frac{\ln(0{,}04)}{\ln(3/5)} \cong 6,3$,
donc au minimum 7 questions.

e) 1) $\left(\frac{3}{5}\right)^3\frac{2}{5} = \frac{54}{625} = 8,64\%$ 2) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{81}{625} = 12,96\%$.

f) $2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{9}{50} = 18\%$.

g) $\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{50} + \left(\frac{3}{5}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{117}{400} = 29,25\%$.