ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG
WWW.FR.CH

Collège St-Michel CSMI
Kollegium St. Michael KSMI

Rue Saint-Pierre-Canisius 10, 1700 Fribourg

Maturité gymnasiale 2015

Mathématiques renforcées

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaire
Barème :	50 points correspondent à la note 6.

Nom : Numéro : Classe :

Problème 1 (12 points)

On considère la fonction réelle f définie par

$$f(x) = x + \ln|1 - e^x|$$

dont le graphe possède trois asymptotes.

1.1 Montrer que

$$f'(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x - 1}$$

sur le domaine de définition de f et donner le tableau de variation de f.

1.2 Montrer que

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

est l'unique zéro de f.

1.3 Calculer la limite

$$\lim_{x\to-\infty} \ln|1 - e^x|$$

et donner l'équation de l'asymptote au graphe de f vers $-\infty$.

1.4 Montrer que

$$f(x) = 2x + \ln\left(1 - e^{-x}\right)$$

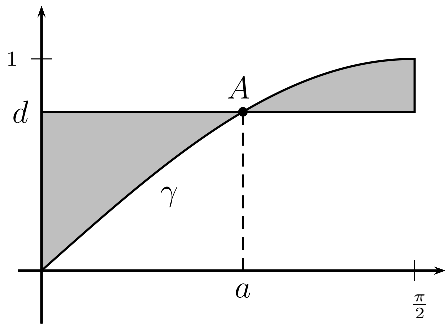
sur $\mathbb{R}_+^*$ et déterminer l'équation de l'asymptote au graphe de f vers $+\infty$.

1.5 Montrer que f ne possède pas de point d'inflexion et représenter son graphe dans un repère orthonormé (unité : 5 carrés).

Problème 2 **(7 points)**

Dans un repère orthonormé, on considère :

- la courbe γ d'équation $y = \sin(x)$;
- un point A d'abscisse $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ situé sur γ ;
- la droite horizontale d qui passe par A ;
- le domaine borné $\mathcal{D}$, colorié en gris sur la figure et délimité par γ, d et les verticales $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.



Dans les questions suivantes, S désigne le solide de révolution obtenu par la rotation de $\mathcal{D}$ autour de d.

2.1 Montrer que le volume de S peut être exprimé en fonction de $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$V(a) = \pi \left(\frac{\pi}{2} \sin^2(a) - 2\sin(a) + \frac{\pi}{4} \right).$$

2.2 Etudier la variation du volume de S en fonction de $a \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. En particulier, donner le volume minimal et le volume maximal.

Problème 3 **(12 points)**

Dans un repère orthonormé de l'espace $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$, on considère

- les points $A(2; 8; 0)$ et $B(-2; 0; 1)$;
- les vecteurs $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$;
- la droite d contenant le point A et de vecteur directeur $\vec{k}$;
- le plan p qui contient le point B et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3.1 Montrer que la droite d est strictement parallèle au plan p et calculer la distance qui les sépare.

3.2 Donner l'équation de la sphère Σ qui est tangente à d et tangente à p en B.

3.3 Le plan p est un miroir. Donner un vecteur qui a la même direction et le même sens que le rayon réfléchi lorsqu'on pointe un laser de A vers B.

Problème 4 **(10 points)**

Considérons l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

4.1 Déterminer le noyau et l'image de f.

4.2 Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les sous-espaces propres associés.

4.3 Donner une interprétation géométrique de f.

4.4 Calculer

$$(f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f \circ f)(u)$$

lorsque u a pour matrice colonne

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

Problème 5 **(12 points)**

Paul et Roger disposent d'une urne qui contient une boule verte, deux boules rouges et trois boules jaunes. Ils jouent à un jeu sans remise au cours duquel ils tirent chacun une boule à tour de rôle. Les règles du jeu stipulent que lors d'une partie :

— c'est toujours Paul qui tire une boule en premier lieu ;

— le jeu s'arrête dès que toutes les boules d'une couleur ont été tirées ;

— le gagnant est celui qui a tiré la dernière boule.

5.1 Soit X la variable aléatoire qui indique le nombre de boules tirées lors d'une partie.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Montrer que $E(X) = \dfrac{41}{15}$ et que $V(X) = \dfrac{254}{225}$.

c) Lorsque 100 parties sont jouées, quelle est la probabilité qu'au moins 280 boules soient tirées ?

5.2 Paul et Roger ont disputé 30 parties.

a) Montrer que la probabilité que Paul ait gagné la première partie est $\dfrac{7}{15}$.

b) Quelle est la probabilité que Paul en ait gagné exactement 14 ?

c) Quelle est la probabilité que Paul en ait gagné exactement 14 sachant que son nombre de victoires est dans l'intervalle $[12; 16]$?