Problème 1 (poids 3)

Etant donné un nombre réel k, on considère l'expression $f_1(x) = x^2 - kx$.

a) Trouver la valeur de k de sorte que l'aire de la surface fermée délimitée par le graphe de f_1 et l'axe Ox soit égale à $\frac{9}{2}$.

Pour la suite, on considère $k = -1$, donc $f_1(x) = x^2 + x$ et $f_2(x) = \sqrt{x^2 + x}$.

b) Les graphes de f_1 et f_2 se coupent en quatre points distincts. Calculer l'angle qu'ils forment en leur point commun de plus grande abscisse dans un repère orthonormé.

On considère maintenant l'expression $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + x}}{x - 1}$.

c) Déterminer le domaine de définition et les zéros de f, ainsi que les asymptotes verticale(s) et horizontale(s).

d) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x)$.

e) Montrer que le graphe de f n'admet aucun point à tangente horizontale.

f) Esquisser le graphe de f dans un repère orthonormé (prendre x et y dans $[-6; 6]$).

g) Trouver les nombres A, B et C tels que $\big(f(x)\big)^2 = A + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{(x-1)^2}$.
Calculer le volume du solide obtenu en faisant tourner le graphe de f autour de l'axe Ox pour $x \in [2; 3]$.

Problème 2 (poids 3)

Dans l'espace vectoriel V_3 muni d'une base orthonormée $(\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2}; \overrightarrow{u_3})$, on considère la transformation linéaire f donnée par la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ -6 & 8 & -10 \\ 8 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} - 2\overrightarrow{u_3}$ est un vecteur propre de f et donner la valeur propre associée.

Soit W le sous-espace formé de tous les vecteurs normaux au vecteur $\overrightarrow{v}$.

b) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{w_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{u_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{u_2} + \frac{1}{3}\overrightarrow{u_3}$ appartient à W.

Trouver un vecteur $\overrightarrow{w_2}$ tel que $(\overrightarrow{w_1}; \overrightarrow{w_2})$ soit une base orthonormée de W.

c) Montrer que $f(\overrightarrow{w_1})$ et $f(\overrightarrow{w_2})$ sont orthogonaux et de même norme. Sachant que l'image par f de W est contenue dans W, décrire géométriquement la transformation du plan W qui envoie $\overrightarrow{w_1}$ sur $f(\overrightarrow{w_1})$ et $\overrightarrow{w_2}$ sur $f(\overrightarrow{w_2})$.

d) Interpréter géométriquement la transformation f.

On considère la transformation linéaire g donnée par la matrice

$$N = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e) Trouver les vecteurs propres associés à la valeur propre 0 et ceux associés à la valeur propre 1.

On considère la transformation affine associée à g qui laisse l'origine fixe.

f) L'image de la sphère de centre $(9; -9; 0)$ et de rayon 3 par cette transformation est un segment. Déterminer les coordonnées de ses extrémités.

Problème 3 (poids 2)

On considère la fonction f définie par $f(z) = \dfrac{z - 2i}{iz + 1}$.

a) Trouver les points fixes de f.

b) Trouver les nombres complexes z pour lesquels $(f(z))^2 = 1$.

Pour $z = x + yi$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a $f(z) = u + vi$ avec

$$u = \frac{-x}{x^2 + (y-1)^2} \quad \text{et} \quad v = \frac{-(x^2 + y^2 - 3y + 2)}{x^2 + (y-1)^2}$$

c) Décrire géométriquement l'ensemble des nombres complexes z dont l'image par f est sur la droite d'équation $v = u$.

d) Décrire géométriquement l'image par f du cercle centré en $(0; 1)$ et de rayon 1.

On considère une fonction g définie par $g(z) = \dfrac{z + a}{bz + 1}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

e) Montrer que l'égalité $g(i) = g(1)$ implique $a \cdot b = 1$.

Problème 4 (poids 2)

Antoine a téléchargé sur son smartphone un jeu de culture générale dans lequel les questions portent en alternance sur les thèmes "Littérature" (questions 1, 3, 5, etc) et "Sciences" (questions 2, 4, 6, etc).
Antoine a une bonne culture générale : la probabilité qu'il réponde correctement vaut $\frac{3}{5}$ pour chaque question "Littérature" et $\frac{4}{5}$ pour chaque question "Sciences".

Première partie : Antoine joue à une partie comprenant six questions (la première question porte sur le thème "Littérature").

a) Quelle est la probabilité qu'Antoine donne d'abord deux réponses fausses, puis quatre réponses correctes ?

b) Quelle est la probabilité qu'Antoine donne au moins cinq réponses correctes ?

c) Sachant qu'Antoine a donné exactement cinq réponses correctes, quelle est la probabilité qu'il ait fait son erreur sur une question "Sciences" ?

Deuxième partie : Antoine décide de répondre à des questions jusqu'à ce qu'il se trompe (la première question porte sur le thème "Littérature").

d) Quelle est la probabilité qu'il se trompe à la septième question ?

e) Quelle est la probabilité qu'il se trompe à une question "Littérature" ?

Troisième partie : Antoine affronte sa petite soeur Zoé. Dans ce duel, deux questions portant sur le thème "Littérature" sont posées à chaque adversaire. Chaque réponse correcte apporte un point. Antoine a toujours une probabilité $\frac{3}{5}$ de répondre correctement à chaque question et Zoé répond au hasard : elle a une probabilité $\frac{1}{4}$ de répondre correctement à chaque question.

f) Quelle est la probabilité que le duel se termine par un match nul ?

Problème 1

a) $\left|\int_0^k (x^2-kx)dx\right| = \frac{9}{2}, \quad \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}kx^2\right]_0^k\right| = \frac{9}{2}, \quad \frac{1}{6}k^3 = \frac{9}{2}, \quad k^3 = 27, \quad k = 3$

b) $f_1(x) = 0$ lorsque $x \in \{-1, 0\}$ et $f_1(x) = 1$ lorsque $x^2 + x - 1 = 0$, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.
La plus grande abscisse des points d'intersection est donc $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Les pentes des tangentes en ce point sont $2x + 1 = \sqrt{5}$ et $\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$, donc l'angle est $\alpha = \tan^{-1}(\sqrt{5}) - \tan^{-1}(\sqrt{5}/2) \cong 17.715°$.

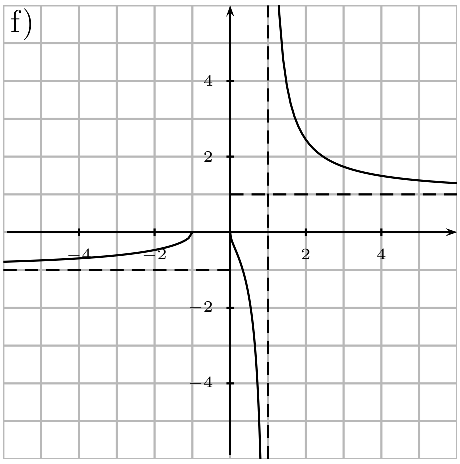
c) $D_f = \big(]-\infty;-1] \cup [0;\infty[\big) \setminus \{1\}$, $Z_f = \{0, -1\}$, A.V. $x = 1$, A.H. $y = \pm 1$

d)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}(x-1) - \sqrt{x^2+x}}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(2x+1)(x-1) - 2(x^2+x)}{2\sqrt{x^2+x}(x-1)^2} \\ &= \frac{-3x-1}{2\sqrt{x^2+x}(x-1)^2} \end{aligned}$$

$\lim_{x\to 0} f'(x) = -\infty$

f)



e) Le graphe de f n'admet aucun p.t.h. car $x = -1/3$ (qui annule le numérateur de f') est en fait un exclu.

g) $f(x)^2 = \frac{x^2+x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + 3(x-1) + 2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{3}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2}$
donc $V = \pi\left[x + 3\ln|x-1| - \frac{2}{x-1}\right]_2^3 = \pi(2 + 3\ln(2))$

Problème 2

a) $M\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0} = 0 \cdot \overrightarrow{v}$, donc $\overrightarrow{v}$ est un vecteur propre pour la valeur propre $\lambda = 0$.

b) $\overrightarrow{w_1}$ a un produit scalaire nul avec $\overrightarrow{v}$. On cherche $\overrightarrow{w_2}$ orthogonal à $\overrightarrow{v}$ et à $\overrightarrow{w_1}$: $\overrightarrow{w_2} /\!/ \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{w_1} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{w_2} = \pm\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (car $\overrightarrow{w_2}$ doit être unitaire)

c) Rotation de 53.13° et homothétie de facteur 15

d) Projection orthogonale sur le plan W, suivie d'une rotation de 53.13° autour de l'axe de direction $\overrightarrow{v}$ et d'une homothétie de facteur 15.

e) les vecteurs 0-propres sont les vecteurs orthogonaux à $\overrightarrow{v}$, les vecteurs 1-propres sont les vecteurs proportionnels à $\overrightarrow{v}$.

f) La transformation g décrit la projection orthogonale sur la droite passant par l'origine et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{v}$. Le centre de la sphère est envoyé sur $C'(6; -3; -6)$ et le vecteur $\overrightarrow{v}$ de norme 3 est envoyé sur lui-même. Les extrémités P_1 et P_2 du segment sont telles que $\overrightarrow{OP_i} = \overrightarrow{OC'} \pm \overrightarrow{v}$. On trouve $P_1(4; -2; -4)$ et $P_2(8; -4; -8)$.

Problème 3

a) $f(z) = z, \quad z - 2i = iz^2 + z, \quad -2i = iz^2, \quad z^2 = -2, \quad z = \pm i\sqrt{2}$

b) $f(z)^2 = 1, \quad (z-2i)^2 = (iz+1)^2, \quad z^2 - 4iz - 4 = -z^2 + 2iz + 1, \quad 2z^2 - 6iz - 5 = 0,$
$\Delta(2; -6i; -5) = -36 - (-40) = 4, \quad z = \dfrac{6i \pm 2}{4} = \pm\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i.$

c) $v = u$ signifie $x^2 + y^2 - 3y + 2 = x$ et $x^2 + (y-1)^2 \neq 0$. La première relation se réécrit $(x - 0.5)^2 + (y - 1.5)^2 = 0.5$, donc l'ensemble cherché est le cercle de rayon $\sqrt{0.5}$ et de centre $(0.5; 1.5)$, privé du point $(0; 1)$.

d) Si $x^2 + (y-1)^2 = 1$, alors $u = -x$ et $v = y - 2$, donc la relation $x^2 + (y-1)^2 = 1$ peut se réécrire sous la forme $(-u)^2 + (v+1)^2 = 1$. L'image cherchée est donc le cercle de rayon 1 centré en $(0; -1)$.

Variante : $f(i + \text{cis}(\alpha)) = \dfrac{\text{cis}(\alpha) - i}{i\,\text{cis}(\alpha)} = \dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{\text{cis}(\alpha)} = -i - \text{cis}(-\alpha)\ldots$

e) $g(i) = g(1), \quad \dfrac{i+a}{bi+1} = \dfrac{1+a}{b+1}, \quad ib + i + ab + a = bi + 1 + abi + a, \quad i + ab = 1 + abi,$
$ab(1-i) = (1-i), \quad ab = 1$

Problème 4

a) $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{288}{15625}$

b) $\mathbb{P}(\text{5 réponses justes}) = 3\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}+3\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{3456+1296}{15625}=\frac{4752}{15625}$

$\mathbb{P}(\text{6 réponses justes}) = \frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{1728}{15625}$

$\mathbb{P}(\text{au moins 5 réponses justes}) = \frac{4752}{15625}+\frac{1728}{15625}=\frac{6480}{15625}=\frac{1296}{3125}=0.41472$

c) $\frac{\mathbb{P}(\text{5 réponses justes et 1 erreur en sciences})}{\mathbb{P}(\text{5 réponses justes})}\overset{b)}{=}\frac{1296/15625}{4752/15625}=\frac{1296}{4752}=\frac{3}{11}=0.\overline{27}$

d) $\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{5}=\frac{3456}{78125}=0.0442368$

e) $\frac{2}{5}\left(1+\frac{3\cdot 4}{5\cdot 5}+\left(\frac{3\cdot 4}{5\cdot 5}\right)^2+\cdots\right)=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-\frac{12}{25}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{25}{13}=\frac{10}{13}\cong 0.7692$

f) $\underbrace{\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{2}{5}\right)^2}_{\mathbb{P}(A=Z=0)}+\underbrace{\left(2\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\right)\left(2\cdot\frac{2}{5}\frac{3}{5}\right)}_{\mathbb{P}(A=Z=1)}+\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{5}\right)^2}_{\mathbb{P}(A=Z=2)}=\frac{36+72+9}{400}=\frac{117}{400}$