Département de l'éducation, de la culture et du sport
Service de l'enseignement
Lycée - Collège des Creusets, Sion

CANTON DU VALAIS
KANTON WALLIS

Departement für Erziehung, Kultur und Sport
Dienststelle für Unterrichtswesen
Kollegium Creusets, Sitten

Lycée Collège Creusets

Examens de maturité 2015

Mathématiques fortes DF — Version A

Problème 1

1. Étudier (sans dérivée seconde) la fonction $f\colon x \mapsto x \cdot \sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$.

   Donner une représentation graphique de cette fonction (unité 1 cm) sachant qu'elle n'admet aucun point d'inflexion.
2. Établir l'équation de la droite qui coupe la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = 4$ sous un angle droit.

Problème 2

1. Utiliser la formule de Moivre pour démontrer l'identité (réelle)

$$\cos^3(x) = \frac{1}{4}\big(3\cos(x) + \cos(3x)\big)$$

2. En déduire le développement en série entière de la fonction $f\colon x \mapsto \cos^3(x)$ (on peut se servir des développements usuels donnés dans le Formulaire). Écrire le terme général de cette série.
3. Calculer à l'aide de ce développement une valeur approchée à 10^{-3} près de l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^3(x)\,dx$$

4. Calculer la valeur exacte de l'intégrale I.
5. Résoudre l'équation différentielle $y'' - y = 4\cos^3(x)$.

Problème 3

Dans l'espace affine de dimension 3 muni d'un repère orthonormé, on donne deux points $A(4\,;1\,;3)$ et $B(-3\,;0\,;1)$ et une droite d d'équations paramétriques $\begin{cases} x = 3+2k \\ y = 4+3k \\ z = 1+k \end{cases}$

1. Montrer que les droites (AB) et d sont gauches ; calculer ensuite la distance de ces deux droites.
2. Déterminer l'équation de la sphère Σ qui passe par les points A et B et dont le centre C appartient à la droite d.

   En cas de non réponse, poursuivre l'exercice avec $\Sigma : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 18$.
3. La sphère Σ est considérée comme un modèle de la terre dont l'équateur passe par les points A et B. Déterminer son axe de rotation et calculer la longueur du plus court chemin de A vers B sur cette sphère.
4. Trouver le centre, le rayon et une représentation cartésienne du plus petit cercle inclus dans Σ et passant par les points A et B.

Problème 4

Un paquet de cartes est constitué de n cartes rouges et $2n$ cartes noires ($n \in \mathbb{N}^*$).

On extrait au hasard, successivement et sans remise, deux cartes de ce paquet.

1. Calculer, en fonction de n, la probabilité de l'événement A : « *Tirer deux cartes de même couleur* ».
2. Pour quelles valeurs de n la probabilité de A est-elle supérieure à 0.55 ?
3. Démontrer que la probabilité de A est croissante et majorée par $5/9$.
4. Calculer la probabilité de l'événement B : « *Tirer une carte noire en premier sachant qu'on a tiré deux cartes de même couleur* ».
5. Pour quelle valeur de n l'événement B est-il certain ?

Pour la suite, on pose $n = 7$ (le paquet contient 7 cartes rouges et 14 cartes noires).

6. On considère le jeu suivant : on extrait au hasard et avec remise sept cartes de ce paquet. Si on obtient au moins trois cartes de chaque couleur, on gagne dix francs. Dans les autres cas, on perd cinq francs. Ce jeu est-il favorable au joueur ?

FIN