Nom et prénom : .... Classe : ....

Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

Applications des Mathématiques
Examen de maturité 2015

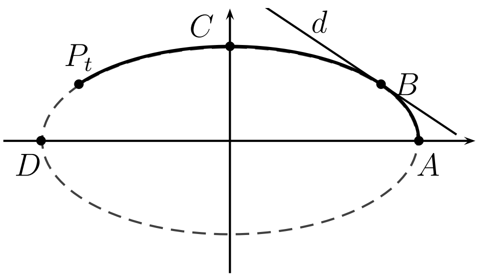
Pour le calcul de la note, le premier problème a un poids 3
et les deux autres problèmes ont chacun un poids 2

Problème 1

Les équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = 10\cos(t) \\ y(t) = 5\sin(t) \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

décrivent une ellipse $\mathcal{E}$ qui passe par les points $A(10;0)$, $B(8;3)$, $C(0;5)$ et $D(-10;0)$.



a) Trouver le vecteur vitesse au point B et donner l'équation de la tangente à l'ellipse en ce point (notée d sur le schéma).

b) Déterminer les valeurs exactes de t pour lesquelles le vecteur vitesse est parallèle au vecteur $\overrightarrow{AC}$.

c) Déterminer l'équation de la parabole qui est tangente à l'ellipse au point C et qui passe par le point B.

d) On considère une parabole d'équation $y = ax^2 + 5$. Trouver le nombre a de sorte que la somme des carrés des distances verticales de la parabole aux points A et B soit minimale.

e) Montrer que la distance de l'origine à un point P_t sur l'ellipse vaut 8 lorsque l'expression $f(t) = 25(\cos t)^2 - 13$ s'annule. Utiliser la méthode de Newton en une étape à partir de la graine $t_0 = \pi/4$ pour estimer un zéro de f.

On note $l(t)$ la longueur de l'arc d'ellipse qui relie le point $A(10;0)$ à un certain point $P_t(10\cos(t); 5\sin(t))$ situé sur l'ellipse.

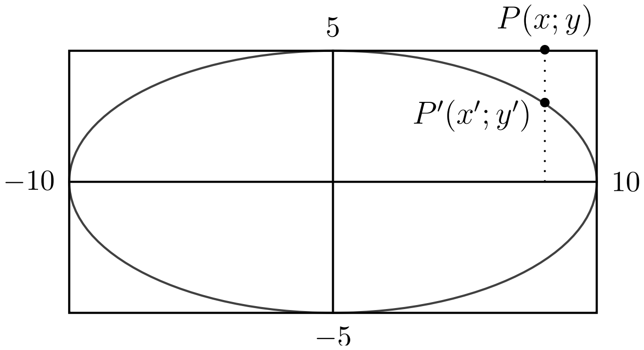
f) Ecrire le code d'une fonction `arc(t)` qui donne une bonne estimation de $l(t)$.

g) Ecrire un programme permettant d'estimer la valeur de $t \in [0; 2\pi]$ pour laquelle $l(t)$ vaut le tiers du périmètre de l'ellipse. On utilisera la fonction `arc(t)` précédente et la méthode de la bissection (Bolzano) qu'on arrêtera dès que la longueur de l'intervalle de recherche est inférieure à 1/1024.

Rappel de la donnée : on considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x(t) = 10\cos(t) \\ y(t) = 5\sin(t) \end{cases} \qquad \text{avec} \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

A chaque point $P(x;y)$ situé sur le rectangle circonscrit à l'ellipse on peut associer à sa verticale un point $P'(x';y')$ sur l'ellipse :



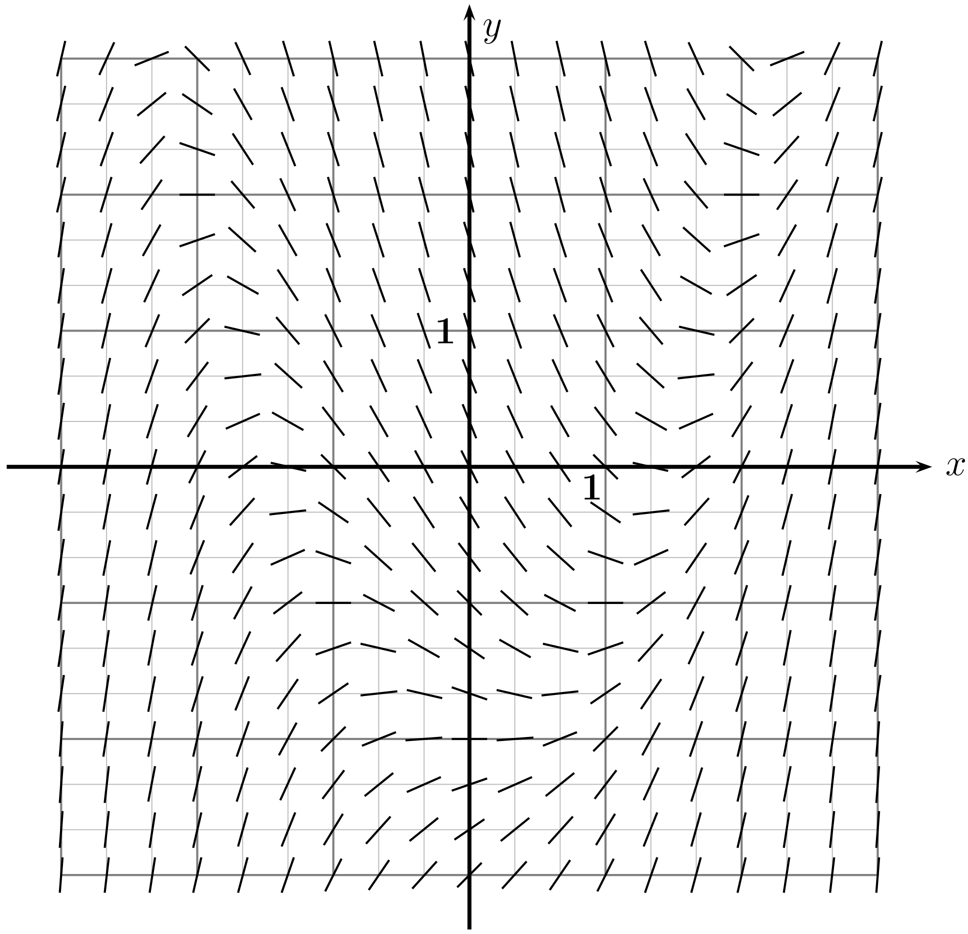
Ceci définit une transformation $\begin{cases} x' = x \\ y' = k \cdot y \end{cases}$ où k dépend uniquement de x.

h) Trouver l'expression de k en fonction de x.

i) Programmer la transformation d'une image rectangulaire de 400×200 pixels en une ellipse en utilisant le facteur d'homothétie verticale k ci-dessus. On supposera que la fonction `k(x)` est déjà programmée et on pourra l'utiliser sans autre.

Problème 2

Le champ des directions de l'équation différentielle $y' = x^2 - y - 2$ est illustré ci-dessous.



On considère la solution $s(x)$ qui vérifie $s(0) = -1$.

a) Esquisser le graphe de s sur l'illustration ci-dessus.

b) Estimer $s(1)$ avec la méthode de Runge et un pas $h = \frac{1}{2}$.

c) Vérifier que $s(x) = x^2 - 2x - e^{-x}$.

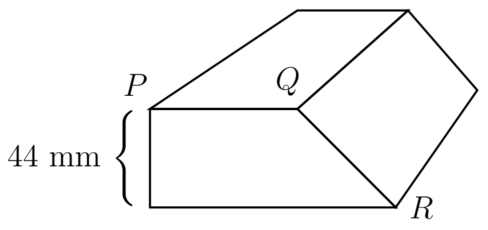
d) Le graphe de s admet un point à tangente horizontale d'abscisse positive. Estimer cette abscisse en utilisant la méthode de Newton en deux étapes à partir d'une graine (valeur initiale) entière.

En dérivant l'équation $y' = x^2 - y - 2$, on obtient l'équation différentielle du deuxième ordre $y'' = 2x - y'$ et on considère la solution $g(x)$ qui vérifie $g(0) = -1$ et $g'(0) = -1$.

e) Estimer $g(1)$ et $g'(1)$ avec la méthode d'Euler et un pas $h = \frac{1}{2}$.
Les fonctions $s(x)$ et $g(x)$ sont-elles égales ? Justifier la réponse.

Problème 3

Sur la feuille annexée, on considère la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l et de ligne d'horizon h.
Un prisme posé sur le sol est donné par sa projection sur le sol.
Les cotes de P, Q et R sont respectivement de 44 mm, 44 mm et 0 mm.



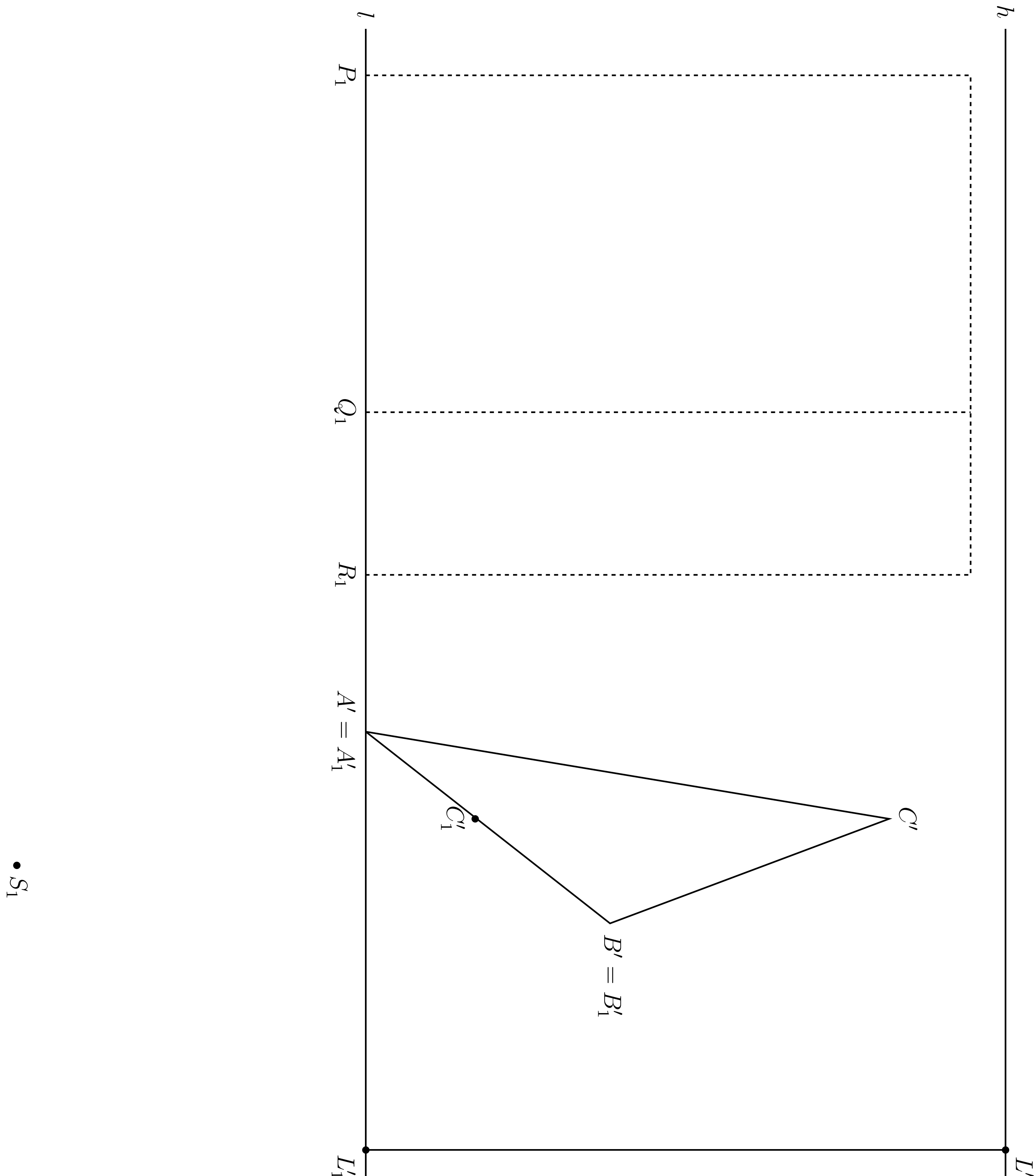
a) Construire la perspective des arêtes visibles du prisme.

Un triangle vertical ABC est donné par sa perspective. Il est éclairé par des rayons lumineux issus du point L, donné par sa perspective L' et la perspective L'_1 de sa projection sur le sol.

b) Dessiner la perspective de l'ombre du triangle sur le sol.

c) Dessiner la perspective de l'ombre du triangle sur le prisme.

d) Construire la projection $A_1B_1C_1$ du triangle sur le sol.



Nom et prénom : ....

Classe : ....

Problème 1

a) Au point B, on a $\cos(t) = 0.8$ et $\sin(t) = 0.6$. Le vecteur vitesse en ce point est donc $\overrightarrow{v} = \binom{-10\sin(t)}{5\cos(t)} = \binom{-6}{4}$. La tangente admet le vecteur normal $\overrightarrow{n} = \binom{2}{3}$ (perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$) et l'équation $2x + 3y - 25 = 0$, càd. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{25}{3}$

b) Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t) = \binom{-10\sin(t)}{5\cos(t)}$ vaut $k\binom{-10}{5}$ lorsque $\sin(t) = \cos(t) = k$. On en déduit que $t \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$.

c) On cherche la parabole du type $y = ax^2 + 5$ qui passe par $B(8; 3)$. On doit donc avoir $3 = 64a + 5$, d'où $a = \frac{-1}{32}$. La parabole admet donc l'équation $y = \frac{-1}{32}x^2 + 5$

d) Les points $A(10; 0)$ et $B(8; 3)$ sont estimés par $A'(10; 100a + 5)$ et $B'(8; 64a + 5)$. La fonction des moindres carrés est $f(a) = (100a + 5)^2 + (64a + 2)^2$. La dérivée est

$$f'(a) = 200(100a + 5) + 128(64a + 2) = 28'192a + 1256$$

Ceci est nul lorsque $a = -\frac{157}{3524} \cong -0.04455$

e) Pour un point $P_t(10\cos(t); 5\sin(t))$, on a

$$\|\overrightarrow{OP_t}\|^2 = 100(\cos t)^2 + 25(\sin t)^2 = 75(\cos t)^2 + 25.$$

Ceci vaut 64 lorsque $75(\cos t)^2 - 39 = 0$, c'est-à-dire $25(\cos t)^2 - 13 = 0$.
Variante : Trouver les quatre valeurs $t \in [0; 2\pi]$ qui annulent f et vérifier qu'elles fournissent toutes un point à distance 8 de l'origine. On peut le vérifier pour une seule valeur et invoquer un argument de symétrie. On peut aussi utiliser la valeur $\cos^2(t) = 13/5$ et la relation de Pythagore.
On a $f'(t) = -50\cos(t)\sin(t)$ et la fonction de Newton est $N(t) = t + \dfrac{25(\cos t)^2 - 13}{50\cos(t)\sin(t)}$.
En particulier, $N(\pi/4) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{25(0.5) - 13}{50(0.5)} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{-0.5}{50(0.5)} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{50} \cong 0.7653981.$

f)
```
Function arc(t)
    Let pas = 1 / 1024
    Let arc = 0
    For t1 = 0 To t - pas Step pas
        Let X1 = 10 * Cos(t1)
        Let Y1 = 5 * Sin(t1)
        Let t2 = t1 + pas
        Let X2 = 10 * Cos(t2)
        Let Y2 = 5 * Sin(t2)
        Let arc = arc + Sqr((X2 - X1) ^ 2 + (Y2 - Y1) ^ 2)
    Next t1
End Function
```

g)

```
Let a = 0
Let b = 2 * 4 * Atn(1)
Let p = arc(b) / 3
Do
    Let m = (a + b) / 2
    If (arc(m) - p) * (arc(a) - p) > 0 Then
        Let a = m
    Else
        Let b = m
    End If
Loop Until b - a < 1 / 1024
Label1.Caption = (a + b) / 2
```

h) On cherche le point de l'ellipse d'abscisse x et d'ordonnée positive. Comme $x = x' = 10\cos(t')$, on a $t' = \arccos(x/10) \in [0; \pi]$ et donc $y' = 5\sin(t') = 5\sin(\arccos(x/10))$. Ainsi $k = \frac{y'}{5} = \sin(\arccos(x/10))$

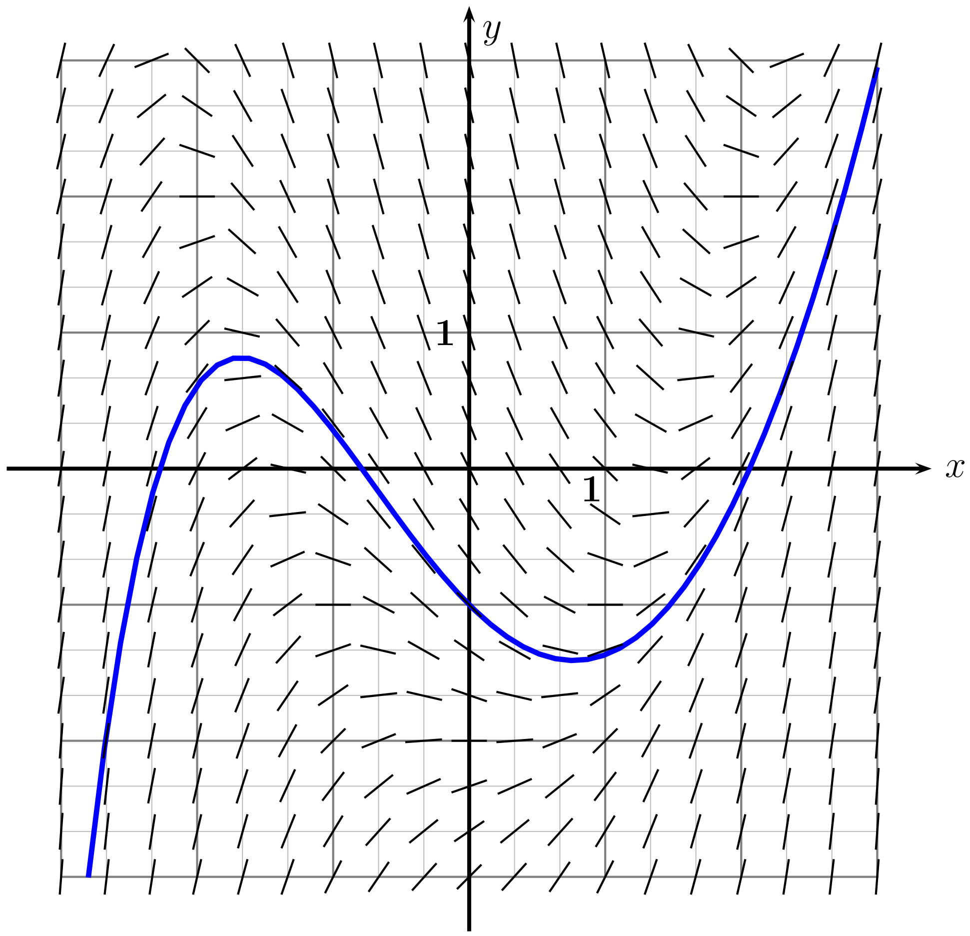
Remarque : $k = \sqrt{1 - \cos^2\left(\arccos\left(\frac{x}{10}\right)\right)} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{100}} = \sqrt{\frac{100 - x^2}{100}} = \frac{\sqrt{100 - x^2}}{10}$.

i)

```
For x = 0 To 400
    For y = 0 To 200
    Let couleur = Picture1.Point(x, y)
    Let xp = x / 20 - 10
    Let yp = y / 20 - 5
    Let yp = k(xp) * yp      ' si k(x) est disponible
                             ' Sinon :
                             ' Let k = Sqr(100 - xp ^ 2) / 10
                             ' Let yp = k * yp
    Picture2.PSet (x, 20 * (yp + 5)), couleur
    Next y
Next x
```

Problème 2

a)



b) On itère la transformation $(x;y) \rightsquigarrow \big(x+0.5; y+0.5(x_*^2-y_*-2)\big)$ avec $x_* = x+0.25$ et $y_* = y+0.25(x^2-y-2)$: $(0;-1)\xrightarrow[y_*=-1.25]{x_*=0.25}(0.5;-1.34375)\xrightarrow[y_*=-1.4453125]{x_*=0.75}(1;-1.33984375)$ donc $s(1) \cong -\frac{343}{256} = -1.33984375$.

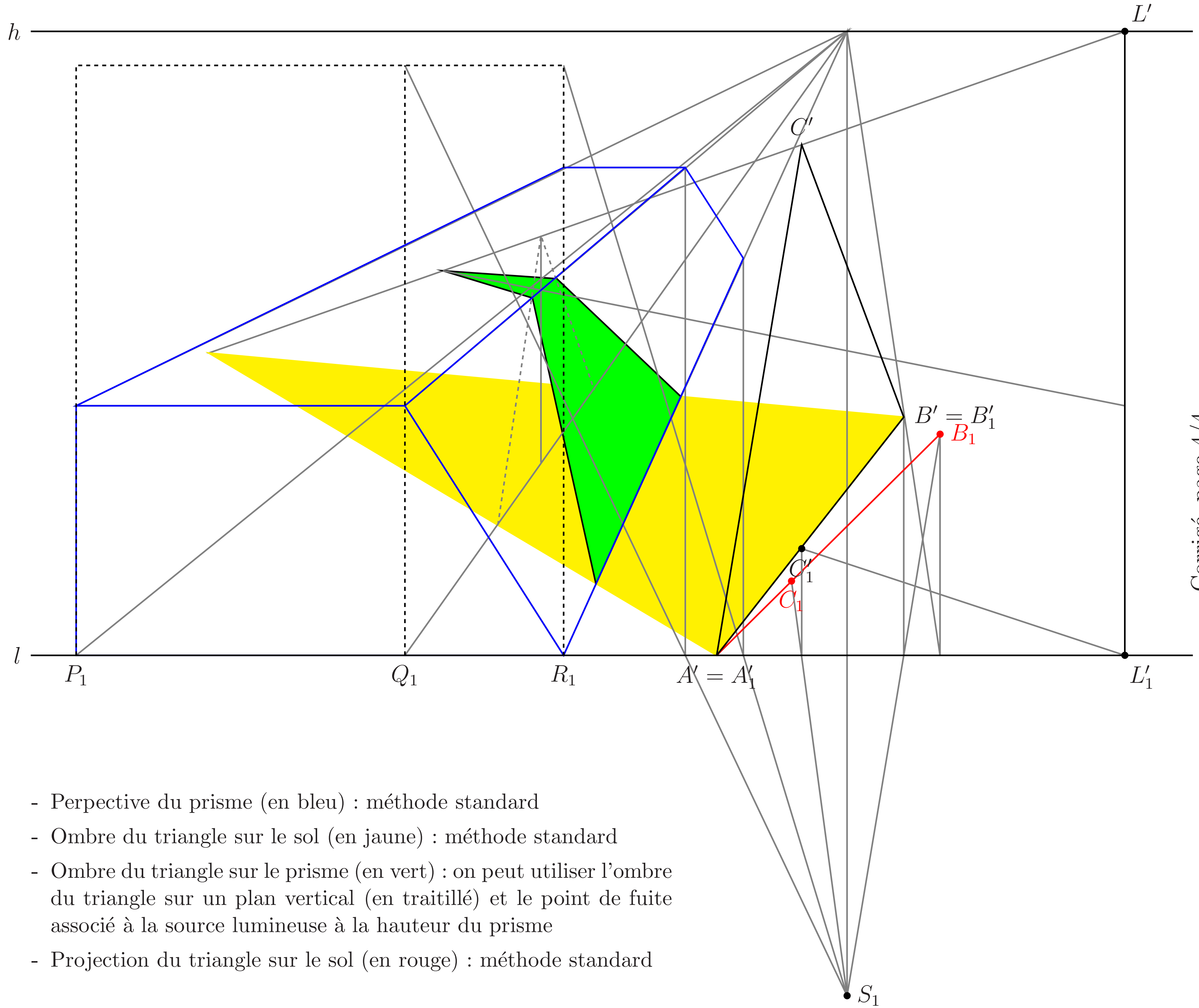
c) La fonction proposée vérifie l'équation différentielle et sa condition initiale.

d) Pour résoudre l'équation $s'(x) = 0$, c-à-d $2x-2+e^{-x} = 0$, on itère la transformation $x \rightsquigarrow x - \dfrac{2x-2+e^{-x}}{2-e^{-x}}$: avec la graine $x = 1$, on trouve $1 \rightsquigarrow 0.7746 \rightsquigarrow 0.768046$

e) On itère la transformation $(x;y;y') \rightsquigarrow (x+0.5; y+0.5y'; y'+0.5(2x-y'))$: on trouve $(0;-1;-1)\longrightarrow(0.5;-1.5;-0.5)\longrightarrow(1;-1.75;0.25)$, donc $g(1) \cong -1.75$ et $g'(1) \cong 0.25$. Les fonctions $s(x)$ et $g(x)$ sont égales car $s'(0) = -1$ donc $s(x)$ vérifie la même équation différentielle que $g(x)$, avec les mêmes conditions initiales.

Lycée Denis-de-Rougemont
Neuchâtel et Fleurier

Problème 3



- Perpective du prisme (en bleu) : méthode standard
- Ombre du triangle sur le sol (en jaune) : méthode standard
- Ombre du triangle sur le prisme (en vert) : on peut utiliser l'ombre du triangle sur un plan vertical (en traitillé) et le point de fuite associé à la source lumineuse à la hauteur du prisme
- Projection du triangle sur le sol (en rouge) : méthode standard