ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Collège St-Michel CSMI
Kollegium St. Michael KSMI

Rue St-Pierre-Canisius 10, 1700 Freiburg

Maturité gymnasiale 2016

Mathématiques standard

Durée de l'épreuve:	180 minutes
Ouvrages et matériels autorisés:	● calculatrice ● formulaires et tables
Barème:	50 points correspondent à la note 6

Nom et prénom : ....

Numéro : ....

Classe : ....

Problème 1 (18 points)

Soit la fonction f définie par

$$f : x \mapsto \frac{2\ln(4-x)}{4-x}$$

1.1 Faire une étude complète de la fonction f jusqu'à la détermination des éventuels extrema.

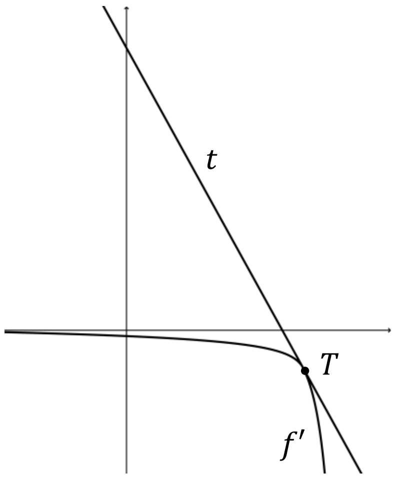
1.2 Sachant que la dérivée seconde de f est

$$f''(x) = \frac{4\ln(4-x) - 6}{(4-x)^3} \ ,$$

vérifier si f possède un point d'inflexion. Si oui, donner ses coordonnées.

1.3 Représenter le graphe de la fonction f dans un repère orthonormé (unité : 4 carrés).

Ci-contre, on donne le graphe de la fonction f' ainsi que celui de la tangente t au graphe de f' au point $T(3; -2)$.



1.4 Montrer que l'équation de t est donnée par

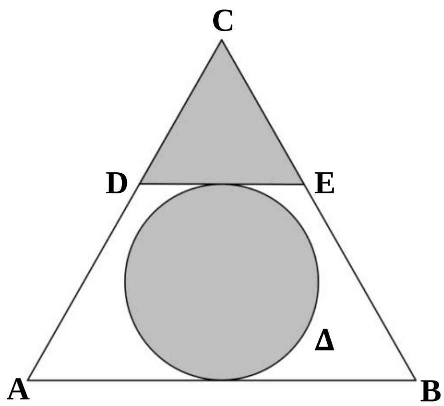
$$y = -6x + 16$$

1.5 En utilisant le fait que f soit une primitive de f', déterminer l'aire du domaine fermé délimité par t, la courbe de f' et l'axe (Oy).

Problème 2 (8 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 2. Dans ce triangle, on représente :

- un triangle CDE tel que D appartienne à $[AC]$ et E appartienne à $[BC]$; le côté $[DE]$ est parallèle à $[AB]$
- un disque **Δ** tangent à la fois à $[AB]$ et $[DE]$



2.1 Le disque le plus grand que l'on puisse considérer est celui qui est tangent aux trois côtés du triangle ABC. Déterminer le rayon R de ce disque.

2.2 On considère la surface grisée sur le schéma ci-dessus. Son aire dépend de la valeur du rayon du disque. On note cette variable r.

Montrer que cette aire est donnée en fonction de r par

$$A(r) = \pi r^2 + \frac{\left(\sqrt{3} - 2r\right)^2}{\sqrt{3}}$$

2.3 Déterminer la valeur de r qui minimise l'aire grisée.

Problème 3 (13 points)

Dans un repère orthonormé, on définit les éléments suivants :

- les points $A(2;1;4), B(1;2;7)$ et $C(4;0;-1)$
- le plan α passant par les points A, B et C
- le plan β passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.1 Déterminer l'équation cartésienne du plan α, puis celle du plan β.

3.2 Calculer l'angle aigu entre les plans α et β.

3.3 Déterminer l'équation cartésienne du plan μ qui contient le point $K(1;0;-2)$ et qui est perpendiculaire aux deux plans α et β.

3.4 Déterminer l'équation de la sphère $\sum$ tangente au plan β en A et passant également par le point $F(3;3;3)$.

Problème 4 (14 points)

L'accès à un centre commercial peut se faire uniquement par la porte d'entrée Nord ou par la porte d'entrée Sud.

Ce magasin comporte un rayon alimentaire, une boutique de vêtements et une pharmacie.

En moyenne, une personne se rendant 500 fois à ce centre franchit l'entrée Nord 300 fois parmi lesquelles elle se dirige 220 fois au rayon alimentaire, 30 fois à la boutique de vêtements et 50 fois à la pharmacie. Les 200 autres fois, elle emprunte l'entrée Sud pour se diriger en moyenne une fois sur dix à la pharmacie et neuf fois sur dix au rayon alimentaire.

On choisit au hasard une personne se rendant à ce centre.

4.1 Calculer la probabilité que cette personne se dirige vers la pharmacie en empruntant l'entrée Nord.

4.2 La personne choisie va dans ce centre commercial quatre fois cette semaine. Quelle est la probabilité qu'elle utilise au plus deux fois l'entrée Nord ?

4.3 Sachant que la personne s'est dirigée deux fois vers la pharmacie cette semaine, quelle est la probabilité qu'elle soit toujours entrée par la porte Nord ?

On choisit au hasard 20 personnes se rendant à ce centre.

4.4 Calculer la probabilité que quatorze d'entre elles exactement se dirigent vers l'alimentation.

On choisit au hasard n personnes se rendant à ce centre.

4.5 Quelle doit être la valeur de n pour que la probabilité de trouver au moins une personne se dirigeant vers la boutique de vêtements soit supérieure à 0,95 ?