EXAMEN DE L'ÉCOLE DE MATURITÉ

MATHÉMATIQUES – NIVEAU RENFORCÉ

Classes concernées :	3M1, 3M2, 3M4, 3M5, 3M01, 3M02, 3M04, 3M05
Date :	Jeudi 9 juin 2016
Durée :	4h
Matériel autorisé apporté par les élèves :	Formulaire agréé, non annoté Calculatrice de type reconnu

Problème 1 (23 points)

On considère la fonction f, donnée par

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}$$

où x est exprimé en radians.

1.1 Déterminer l'ensemble de définition de f.

1.2 Calculer $f(0)$ et $f(2\pi)$.

Dans tout ce qui suit, nous allons étudier la fonction sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1.3 Déterminer le(s) zéro(s) et étudier le signe de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1.4 Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{3\pi}{2}} f(x)$ et interpréter le résultat.

1.5 Montrer que $f'(x) = \dfrac{-\sin(x) - \sin^2(x) - 2\cos^2(x)}{(1+\sin(x))^3}$.

1.6 Montrer, de plus, que $\dfrac{-\sin(x) - \sin^2(x) - 2\cos^2(x)}{(1+\sin(x))^3} = \dfrac{\sin(x) - 2}{(1+\sin(x))^2}$.

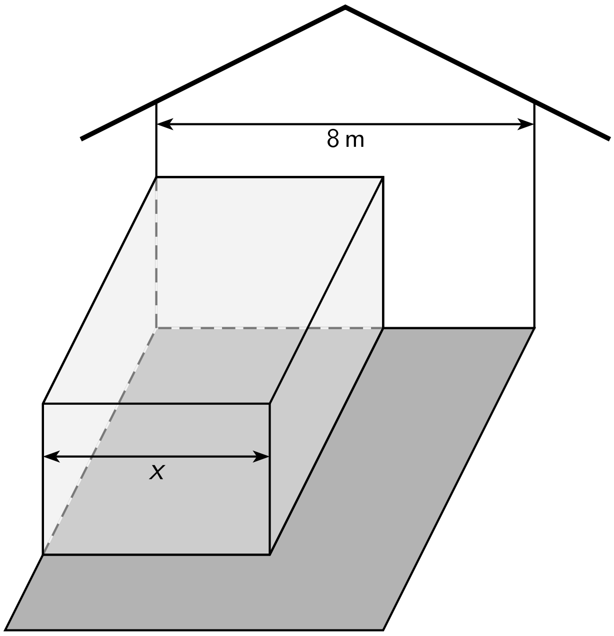
1.7 Étudier la croissance de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

1.8 Déterminer l'équation de la tangente t au graphe de f au point d'abscisse $x = \dfrac{\pi}{2}$.

1.9 Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Problème 2 (14 points)

Monsieur Bellivert souhaite construire une véranda. Celle-ci aura la forme d'un parallépipède rectangle. Elle sera directement posée sur le sol de sa terrasse et appuyée contre la façade de sa maison.



La longueur de la véranda devra être le double de sa largeur. Cette largeur x ne devra pas dépasser celle de la maison, à savoir 8 mètres. Enfin, le volume de la véranda vaudra $96\,\text{m}^3$.

Les matériaux utilisés sur les trois côtés coûtent $240\,\text{CHF}/\text{m}^2$. Ceux du toit plat, plus légers, coûtent quant à eux $225\,\text{CHF}/\text{m}^2$.

2.1 Montrer que le prix de construction de la véranda peut s'exprimer, par rapport à sa largeur x, au moyen de la fonction :

$$P(x) = \frac{450x^3 + 57'600}{x}$$

2.2 Déterminer les dimensions de la véranda de prix minimal.

2.3 Quel est le coût de cette véranda de prix minimal ?

Problème 3 (12 points)

En décembre 2013, une épidémie virale a débuté au niveau mondial. Plusieurs chercheurs se sont efforcés de mettre au point un vaccin contre le virus. Une fois créé, le vaccin a été testé dans plusieurs pays afin d'être validé. Des tests ont été effectués sur 160 volontaires pour évaluer les effets secondaires.

Parmi ces volontaires, 80 ont reçu une version du vaccin à faible dosage, 40 ont reçu une version du vaccin à haut dosage et 40 ont reçu un placebo (ils croyaient recevoir le vaccin alors qu'ils recevaient une injection sans vaccin). Les volontaires n'étaient pas informés de ce qui leur était injecté.

Au terme du test, il est apparu que 90% de ceux qui ont reçu le vaccin à faible dosage ont ressenti des effets secondaires classiques, tels que fièvre et refroidissement, les 10% restants n'ayant pas ressenti d'effet secondaire particulier. Parmi les personnes ayant reçu le vaccin à haut dosage, 60% ont ressenti des effets secondaires classiques, alors que les 40% restants ont ressenti des effets secondaires inattendus : des douleurs articulaires. Enfin, dans le groupe qui a reçu le placebo, 30% des individus ont ressenti des effets secondaires classiques, les autres n'ayant, quant à eux, rien ressenti du tout.

3.1 Établir l'arbre correspondant à la situation décrite.

3.2 Montrer que la probabilité pour un volontaire d'avoir eu la malchance de ressentir des douleurs articulaires est de 10%.

3.3 Quelle est la probabilité pour un individu ayant participé au test de n'avoir ressenti aucun effet secondaire ?

3.4 Déterminer la probabilité d'avoir fait partie du groupe placebo, si des effets secondaires classiques ont été ressentis.

On recommence l'expérience avec de nouveaux volontaires.

3.5 Marie est une spécialiste qui suit 25 nouveaux volontaires. On suppose que la probabilité de ressentir des douleurs articulaires vaut également 10%. Afin de garantir une étude sans influence, Marie n'est pas non plus informée de ce qu'elle injecte à ses patients. Quelle est la probabilité qu'exactement cinq patients dont elle a la charge ressentent des douleurs articulaires ?

Problème 4 (15 points)

Les parties A (5 points), B (5 points) et C (5 points) sont indépendantes.

Partie A

Alice ouvre un compte dans une banque et y verse 1'000 francs, soumis à intérêts composés.

4.A.1 Si le taux d'intérêt annuel que pratique cette banque est de 3%, quel sera le montant sur le compte au bout de 31 ans ?

4.A.2 À quel taux doit-elle placer le capital pour que celui-ci double après 10 années ?

Partie B

Soit la fonction $f(x) = e^x$ et soit le nombre réel $a > 0$.

On considère le domaine borné D limité par le graphe de f, les axes Ox, Oy et la droite $x = a$.

4.B Déterminer la valeur exacte de a pour que le volume engendré par la rotation de D autour de l'axe Ox soit égal à 2π.

Partie C Soit le polynôme complexe $P(z) = z^3 - 4z^2 + z + 26$.

4.C Factoriser complètement $P(z)$ dans $\mathbb{R}[z]$, puis dans $\mathbb{C}[z]$.

Problème 5 (12 points)

Considérons les points $A(-3;5;-5)$, $C(1;0;-2)$, $P(5;0;1)$, ainsi que la droite

$$d : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

5.1 Donner l'équation de la sphère Σ centrée en C, qui est tangente à la droite d.
Préciser les coordonnées du point de tangence T.

5.2 Montrer que le point P appartient à la sphère Σ, puis donner l'équation du plan π tangent à Σ en P.

5.3 Déterminer les coordonnées du point B appartenant à la droite d pour que le triangle ABC soit rectangle en C. Calculer son aire.

5.4 Calculer les coordonnées du point d'intersection J entre la droite d et le plan π.

Problème 6 (15 points)

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique, on considère l'endomorphisme f donné par la matrice :

$$F = \begin{pmatrix} a & -b & b \\ -2b & 3a-b & -4a \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

où a et b sont des nombres réels.

6.1 Montrer que f est bijectif si et seulement si $(a-b)(a+b) \neq 0$.

6.2 Déterminer la valeur des paramètres a et b pour que l'image par l'endomorphisme f du vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ soit le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Peut-on alors affirmer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est l'image par f du seul vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$? Justifier.

6.3 On pose $a = b = 0$. Montrer que f est alors diagonalisable, puis donner une base de sorte que la matrice représentative de f relativement à cette base soit diagonale.
Donner cette matrice et interpréter géométriquement f dans ce cas.