ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Kollegium St. Michael KSMI
Collège St-Michel CSMI

Rue Saint-Pierre-Canisius 10, 1700 Fribourg

Maturité 2016

Application des mathématiques

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	• calculatrice • formulaires et tables
Barème :	50 points correspondent à la note 6

Nom : Numéro : Classe :

Problème 1 (10 points)

On considère la fonction complexe $p(z) = z^3 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

1.1 Calculer **à la main** les racines (zéros) de p.

1.2 En utilisant $z_0 = 1$ comme estimation de départ (point de départ), la méthode de Newton permet d'obtenir une bonne estimation d'un zéro de p. Calculer **à la main** les deux estimations suivantes z_1 et z_2 sous la forme $a + i\,b$ en laissant tous les détails des calculs, puis déterminer les 28 prochaines estimations à l'aide de Mathematica.

1.3 Sans faire appel aux instructions de Mathematica contenant le mot « Julia », tracer l'ensemble de Julia de p pour des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont entre -1 et 1.
Suggestion : utiliser la fonction Mathematica **DensityPlot** avec les options ColorFunction → Hue, ColorFunctionScaling → False.

1.4 Tracer avec Mathematica les bassins d'attraction de Newton (appelés aussi fractale de Newton) de la fonction p pour des nombres complexes dont les parties réelles et imaginaires sont entre -1 et 1.

Problème 2 (11 points)

On considère la fonction réelle $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

2.1 Montrer **à la main** que le polynôme de Taylor de degré 3 de $f(x)$ autour de $a = 1$ est $p_3(x) = 1 + \frac{x-1}{3} - \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{5}{81}(x-1)^3$.

2.2 Selon l'inégalité de Taylor (appelée aussi reste de Lagrange), quelle est l'erreur maximale entre $p_3(x)$ et la racine cubique de x pour $x \in [0{,}7; 1{,}3]$?

2.3 Déterminer la fraction irréductible égale à $p_3(1{,}3)$. Quelle est l'erreur absolue avec $\sqrt[3]{1{,}3}$?

2.4 Il existe une seule fraction plus précise pour $\sqrt[3]{1{,}3}$ ayant comme numérateur et dénominateur un nombre entier inférieur à 150. Déterminer cette fraction.

2.5 Donner le polynôme d'interpolation de Lagrange de degré 2 interpolant $f(x) = \sqrt[3]{x}$ aux points $x_0 = 1^3$, $x_1 = (1{,}1)^3$ et $x_2 = (1{,}2)^3$. En déduire une fraction proche de la racine cubique de 1,3.

Problème 3 **(14 points)**

On considère une population initiale de 1000 bactéries qui se développe selon l'équation logistique (**ED**) suivante :

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}07P(1 - 10^{-4}P)$$

3.1 Quelle est la capacité maximale de cette population ?

3.2 Calculer une estimation de $P(36)$ **à la main** à l'aide de la méthode de Heun (en 2 pas, ce qui signifie que $h = 18$).

3.3 Résoudre **à la main** (en séparant les variables) l'équation différentielle (**ED**) avec sa condition initiale.

3.4 Implémenter en Mathematica la méthode de Gill décrite ci-dessous dans un module **méthodeGill[f, x0, y0, x, n]** qui retourne en output à son exécution $y(x)$ où y est solution de l'équation différentielle $y' = f(x,y)$ sous la condition initiale $y(x0) = y0$ (n est le nombre de pas de la méthode).

Description de la Méthode de Gill :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + (2 - \sqrt{2})k_2 + (2 + \sqrt{2})k_3 + k_4) \text{ avec}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x_n,y_n) \\ k_2 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}k_1) \\ k_3 &= hf(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}(-1 + \sqrt{2})k_1 + (1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})k_2) \\ k_4 &= hf(x_n + h, y_n - \tfrac{1}{2}\sqrt{2}k_2 + (1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2})k_3) \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = x_n + h.$$

3.5 On supposera que l'erreur d'une méthode d'ordre p est donnée par

$$e(h) = Ch^p.$$

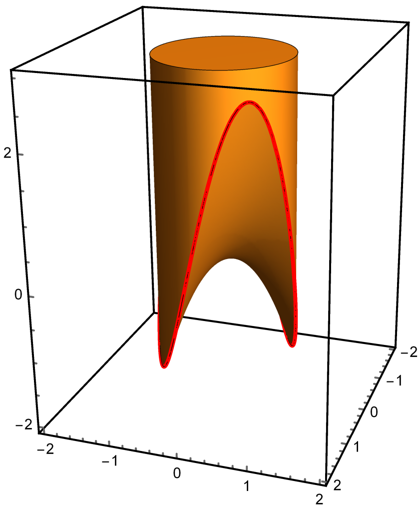
Compléter avec Mathematica le tableau ci-dessous dans lequel la valeur $P(36) = \dfrac{10000}{1 + 9e^{-63/25}}$ est estimée par y_n en n pas selon la méthode de Gill.

Si l'implémentation de la méthode de Gill n'est pas réalisée avec succès, créer ce tableau avec la méthode d'Euler.

n	y_n	$e(h) = \lvert y_n - P(36)\rvert$	$\frac{e(h)}{e(h/2)}$	p	C
2					
4					
8					
16					
32					
64					
128					

Problème 4 (20 points)

On considère le solide S délimité par les 3 surfaces $S_1 : z = 3$, $S_2 : x^2 + y^2 = 1$, et $S_3 : z = x^2 + 4xy$.



4.1 Représenter dans Mathematica ce solide S dans un seul repère de manière analogue au graphique ci-dessus.

4.2 Tracer en rouge la courbe d'intersection des surfaces S_2 et S_3.

4.3 Calculer la longueur de cette courbe.

4.4 Calculer la cote maximale de cette courbe en exprimant ses coordonnées z en fonction de celles de x et en dérivant cette fonction.

4.5 Calculer le maximum de la fonction $f(x,y) = x^2 + 4xy$ (dont le graphe est S_3) sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$ à l'aide des multiplicateurs de Lagrange.

4.6 Calculer le volume du solide S à l'aide d'une double intégrale ou d'une simulation de Monte-Carlo.

4.7 Soit l'intégrale définie

$$I = \int_{-1}^{1} (4x - 4x^3 + 2x^2\sqrt{1 - x^2})\, dx.$$

(a) En définissant T_n comme étant l'approximation de I donnée par la méthode des trapèzes avec n points équidistants entre -1 et 1, pourquoi T_n converge vers I et pourquoi la borne d'erreur pour la méthode des trapèzes que l'on trouve dans les « Formulaires et tables » n'est pas applicable ?

(b) Créer le module **méthodeTrapèze[h, a, b, x, n]** dans Mathematica qui calcule $\int_a^b h(x)dx$ par la méthode des trapèzes (les arguments de ce module sont : n=nombre de trapèzes, a=bord gauche de l'intervalle, b=bord droit de l'intervalle et h la fonction continue sur $[a; b]$ à intégrer).

(c) Sachant que le volume du solide S peut-être obtenu par le calcul $3\pi - I$, calculer l'approximation du volume du solide S avec la valeur minimale de n telle que $|T_n - I| < \frac{10^{-3}}{2}$.