ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Collège St-Michel CSMI
Kollegium St. Michael KSMI

Petrus-Kanisius Gasse 10, 1700 Freiburg
rue St-Pierre Canisius 10, 1700 Fribourg

Maturité gymnasiale
Gymnasiale Matura 2017

Mathématiques standard

Durée de l'épreuve:	180 minutes
Ouvrages et matériels autorisés:	Formulaires et Tables
	Machine à calculer
Barème:	50 points correspondent à la note 6

Nom - prénom : ....

Numéro : ....

Classe : ....

Problème 1 (16 points)

Soit la fonction définie par

$$f : x \mapsto -\frac{2}{x^2}\, e^{\frac{1}{x}}$$

1.1 Etudier les points suivants :

- Domaine de définition de f
- Parité de f
- Signe de f
- Asymptotes au graphe de f

1.2 Montrer que la dérivée de f peut s'écrire sous la forme

$$f'(x) = \frac{4x+2}{x^4}\, e^{\frac{1}{x}}$$

1.3 Etablir le tableau de variation de la fonction f en indiquant les coordonnées des extrema (la dérivée seconde et le graphe de f ne sont pas demandés).

1.4 Calculer l'aire du domaine délimité par le graphe de f, l'axe des x et les verticales d'équations $x = -2$ et $x = -\frac{1}{4}$.

Problème 2 (8 points)

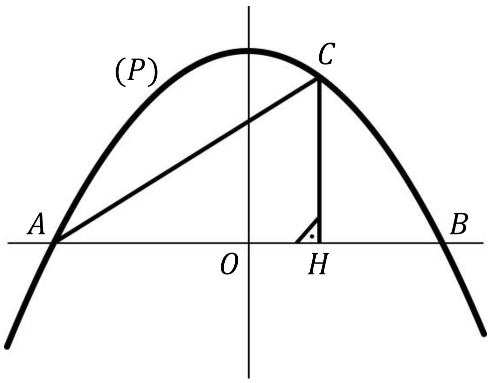
On considère la parabole (P) d'équation

$$y = -\frac{x^2}{4} + 4$$

Elle coupe l'axe des x en A et en B, comme décrit sur la figure ci-contre.

Soit un point C, d'abscisse a $(0 < a < 4)$, variable sur (P).

On appelle H la projection orthogonale de C sur l'axe des x.



2.1 Montrer que l'aire du triangle AHC est donnée en fonction de a par

$$S(a) = \frac{1}{8}(a+4)^2(4-a)$$

2.2 Déterminer les coordonnées du point C pour que l'aire du triangle AHC soit maximale.

2.3 Calculer cette aire maximale.

Problème 3 (13 points)

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(4;3;1)$, $C(2;5;1)$ et $S(3;4;3)$.

3.1 Calculer les coordonnées de la trace de la droite (CS) avec le plan (xOz).
3.2 Calculer l'angle entre la droite (CS) et le plan (xOz).
3.3 Démontrer que la droite perpendiculaire aux droites (CS) et (AS) est parallèle au plan $z = 1$.

Soit Σ la sphère de centre S passant par le point A.

3.4 Calculer le rayon du cercle d'intersection de Σ avec le plan $z = 1$.
3.5 Donner l'équation de la sphère Σ.

Soit $ABCDS$ la pyramide régulière de sommet S à base carrée dont on connaît la diagonale $[AC]$.

3.6 Représenter la pyramide $ABCDS$ dans un repère orthonormé et donner les coordonnées des points B et D.
3.7 Calculer le volume de la pyramide $ABCDS$.

Problème 4 (15 points)

On considère une urne qui contient trois boules vertes et sept boules rouges.

Les trois parties du problème peuvent être résolues indépendamment.

4.1 On effectue un tirage **simultané de 4 boules** de cette urne.
  4.1.1 Calculer la probabilité de tirer quatre boules rouges.
  4.1.2 Calculer la probabilité d'obtenir des boules des deux couleurs.
  4.1.3 Calculer la probabilité d'obtenir deux boules rouges et deux boules vertes, sachant que l'une au moins est verte.

4.2 On effectue n tirages **simultanés de 4 boules** de cette urne (entre chaque tirage, on remet les quatre boules dans l'urne).
Calculer le nombre minimal n de tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois les trois boules vertes soit supérieure à 0,75.

4.3 Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de boules rouges obtenues en tirant **successivement sans remise 3 boules** de cette urne.
  4.3.1 Définir la loi de probabilité de X.
  4.3.2 Calculer l'espérance mathématique de X.