Examens de maturité 2017

Mathématiques Normales	DF	5E - 5F	Version A

Exercice 1

Effectuer l'étude complète de la fonction réelle définie par

$$f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x^2}$$

Exercice 2

Soit l'endomorphisme

$$f((x, y, z)) = (3x - 4y + 5z, 3x - 4y + 5z, 3x - 4y + 5z)$$

donné relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice de f^2 dans la base canonique.

2. Déterminer une base dans laquelle la matrice de f est diagonale et donner la matrice de f^2 dans cette base.

Exercice 3

Relativement à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, I, J, K)$, nous considérons

les points $R\,(-1, 5, -2)$, $\quad S\,(2, -4, 1)$ $\quad$ et $\quad T\,(1, -2, 1)$

la droite $\quad d : \begin{cases} x &= 2 + k \\ y &= -4 - 2k \\ z &= 1 + 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$

et les plans $\alpha \,:\, 2x - 3y + 5z - 6 = 0$ $\quad$ et $\quad \beta \,:\, 2x - 6y + 3z - 11 = 0$.

1. Déterminer l'équation cartésienne du plan γ passant par R, S et T.
2. Déterminer les équations paramétriques de la droite e, intersection des plans α et β.
3. Déterminer la mesure de l'angle aigu φ formé par les plans α et β.
4. Vérifier que les droites d et (ST) sont sécantes puis déterminer leur point d'intersection M.
5. Déterminer l'équation cartésienne de la sphère Σ de centre R et tangente à β.
6. Déterminer le point R', symétrique de R par rapport au plan β.

Exercice 4

Relativement à un repère orthonormé, nous considérons les points $Q\,(3,3,2)$ et $R\,(0,1,2)$ ainsi que le point $P\,(x,0,0)$ sur l'axe O_x.

1. Montrer que l'aire du triangle basé sur les vecteurs $\overrightarrow{PR}$ et $\overrightarrow{PQ}$ égale $A(x) = \dfrac{\sqrt{4x^2+12x+61}}{2}$
2. Déterminer la valeur de x pour laquelle $A(x)$ est minimale. Justifier qu'il s'agit bien d'un minimum.

Exercice 5

Vanessa suit des cours du soir. Ceux-ci se terminent vers 23h. Trois fois sur cinq, son cousin Jo la ramène gratuitement dans son taxi, sinon, trois fois sur 4, elle arrive à attraper le car et le trajet de retour lui coûte alors CHF 5.-. Enfin, si elle rate le car, elle tire à pile ou face pour décider si elle prend un taxi payant qui lui coûte CHF 45.- ou si elle reste à l'hôtel pour CHF 50.-.

1. Montrer que la probabilité que Vanessa passe sa nuit à l'hôtel égale $\dfrac{1}{20}$.
2. Combien de cours doit prendre Vanessa pour que la probabilité qu'elle dorme au moins une fois à l'hôtel soit supérieure à 90% ?
3. Quelle est la probabilité que, sur 20 soirs, Vanessa rentre exactement 15 fois avec Jo ?
4. Quelle est la probabilité que, sur 20 soirs, Vanessa rentre 10 fois avec Jo, 7 fois avec le car et 3 fois avec un taxi payant ?
5. La maman de Vanessa la voit descendre d'un taxi. Quelle est la probabilité que Jo soit au volant ?
6. À quel coût peut s'attendre Vanessa pour 20 soirs de formation ?

FIN

Bon travail !