ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG
WWW.FR.CH

Collège St-Michel CSMI
Kollegium St. Michael KSMI

Rue Saint-Pierre-Canisius 10, 1700 Fribourg

Maturité gymnasiale 2017

Mathématiques renforcées

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et tables numériques prêtées par l'école ;
	Calculatrice (non programmable, non graphique
	et ne permettant pas le calcul symbolique).
Barème :	50 points correspondent à la note 6.

Nom – Prénom : ....

Numéro : ....

Classe : ....

Problème 1 **(8 points)**

On considère le nombre complexe $u = \dfrac{8}{i-1}$.

1.1 Calculer le module et l'argument de u.

1.2 Montrer que u^8 est réel.

1.3 Mettre sous forme trigonométrique, puis sous forme algébrique le nombre complexe z tel que

$$z \cdot u = 4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)$$

1.4 Mettre sous forme algébrique le nombre complexe $z \cdot u$ et en déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

Problème 2 **(6 points)**

Une tente igloo a un fond carré de 2 mètres de côté et deux armatures en demi-cercle.
Calculer son volume.

Remarque : dans cette tente, toute section horizontale est un carré !

Problème 3 **(8 points)**

Deux mobiles A et B se déplacent sur les axes d'un repère orthonormé (unité 1 cm).

Au départ, A se trouve sur l'axe des x en -9 et se déplace à la vitesse constante de 2 cm/s et B se trouve sur l'axe des y en -20 et se déplace à la vitesse constante de 3 cm/s. Au début, les deux mobiles se rapprochent donc l'un de l'autre, avant de s'éloigner.

3.1 Quand ces deux mobiles seront-ils le plus proches ?

3.2 Dix secondes après le départ, à quelle vitesse s'accroît la distance entre les deux mobiles ?

Problème 4 (9 points)

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct usuel $\left(O;\vec{\imath};\vec{\jmath};\vec{k}\right)$, on considère

— la sphère (s) d'équation $x^2+y^2+z^2=45$,

— le plan (p) d'équation $x+2y+2z-18=0$,

— et la droite (d) d'équations $\begin{cases} x=20+2k \\ y=4+k \\ z=-5-2k \end{cases}, k\in\mathbb{R}$.

4.1 Déterminer le centre C et le rayon r du cercle (c), intersection de la sphère (s) et du plan (p).

4.2 Démontrer que la droite (d) est incluse dans le plan (p).

4.3 Déterminer les coordonnées du point P de la droite (d) qui est le plus proche de la sphère (s).

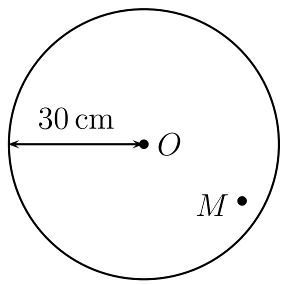
4.4 Déterminer les équations paramétriques d'une droite parallèle à (d) et tangente au cercle (c).

Problème 5 (10 points)

Partie I

On considère un disque de rayon 30 cm et de centre O posé sur le sol comme l'illustre la figure ci-contre.

Soit X la variable aléatoire qui, à un point M du disque, associe la distance OM exprimée en centimètres.



5.1 Déterminer la fonction densité de probabilité de X.

5.2 Calculer l'espérance de X.

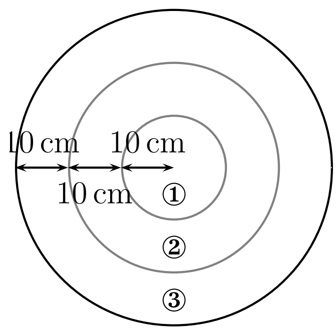
Partie II

Pour jouer à un jeu, on sépare le disque précédent en trois zones concentriques comme l'illustre la figure ci-contre, et on fait tomber des petites billes au hasard sur ce disque.

— Si une bille atteint la zone ①, on reçoit 2 francs ;

— si elle atteint la zone ②, on reçoit 1 franc ;

— si elle atteint la zone ③, on doit donner 1 franc.



Appelons Y la variable aléatoire associée au gain de ce jeu.

5.3 Donner la loi de probabilité de Y.

5.4 Dire si le jeu est équitable.

5.5 300 billes tombent sur le disque.
Estimer la probabilité d'avoir gagné plus de 10 francs.

Problème 6 **(14 points)**

Dans l'espace muni du repère orthonormé direct usuel $\left(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$, on donne deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$ tels que

$$\vec{a} = -\frac{3}{5} \cdot \vec{\imath} + \frac{4}{5} \cdot \vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{c} = -\vec{\jmath}.$$

6.1 Trouver les composantes d'un vecteur $\vec{b}$ pour que $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ soit une base orthonormée directe de l'espace.

6.2 Exprimer les vecteurs $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ dans la base $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

Dans l'espace vectoriel des vecteurs géométriques de l'espace, on appelle f la projection orthogonale sur le plan vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$.

6.3 Donner la matrice A' de f relativement à la base $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

6.4 Donner la matrice A de f relativement à la base $\left(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$.

Une transformation g des vecteurs de l'espace est donnée par sa matrice B relative à la base $\left(\vec{\imath}; \vec{\jmath}; \vec{k}\right)$:

$$B = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 24 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

6.5 Montrer que le vecteur $\vec{a}$ est un vecteur propre de g et donner sa valeur propre correspondante.

6.6 Déterminer les valeurs et vecteurs propres de g. En déduire une interprétation géométrique de la transformation g.

6.7 Sans calculer la matrice de $f \circ g$, donner les valeurs et vecteurs propres de cette dernière transformation.

Corrigés

Corrigé problème 1

a) $u = \dfrac{8}{i-1} = \dfrac{8(-i-1)}{2} = -4-4i \Rightarrow |u| = 4\sqrt{2}$ et $\arg(u) = \arctan(1) - \pi = -\dfrac{3\pi}{4}$ /2

b) $\arg(u^8) = 8 \cdot \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -6\pi \Rightarrow e^{-6\pi i} = 1 \Rightarrow u^8 \in \mathbb{R}$ /1

c) $|z| \cdot |u| = 4 \Rightarrow |z| = \dfrac{4}{|u|} = \dfrac{4}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ /1

$\arg(z) + \arg(u) = \dfrac{5\pi}{12} \Rightarrow \arg(z) = \dfrac{5\pi}{12} - \arg(u) = \dfrac{5\pi}{12} + \dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{14\pi}{12} = \dfrac{7\pi}{6}$ /1

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \exp\left(\frac{14\pi}{12}\, i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \exp\left(\frac{7\pi}{6}\, i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \exp\left(-\frac{5\pi}{6}\, i\right)$$

$z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\, i\right) = \dfrac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}\, i}{4}$ /1

d) $z \cdot u = \dfrac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}\, i}{4} \cdot (-4-4i) = \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right) + \left(\sqrt{6} + \sqrt{2}\right) i$ /1

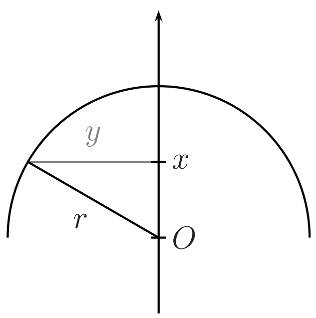
$\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. /1

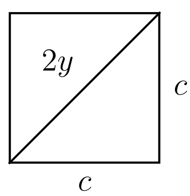
Corrigé problème 2

Appelons r le rayon des arcs de cercle.

Plaçons un axe x vertical, dirigé vers le haut avec son origine à l'altitude de la base de la tente (cf. première figure ci-contre). /1

À l'altitude x, le carré a pour côté c qui est tel que $c^2 + c^2 = 4y^2$ (cf. deuxième figure ci-contre), avec $y^2 = r^2 - x^2$.





/2

Quand $x = 0$, $y = r$ et $c = 2 \Rightarrow r = \sqrt{2}$. /1

L'aire du carré de côté c vaut : $A = c^2 = 2y^2 = 2(r^2 - x^2)$.

La méthode des coupes transversales permet de calculer le volume de la tente :

$V = \displaystyle\int_0^{\sqrt{2}} A(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\sqrt{2}} 2(2 - x^2)\,\mathrm{d}x$ /1

$= 2\left(2x - \dfrac{1}{3}x^3 \Big|_0^{\sqrt{2}}\right) = 2\left(2\sqrt{2} - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} \approx 3{,}77\,\mathrm{cm}^3$ /1

Corrigé problème 3

a) Horaire de A : $A(-9+2t;0)$. Horaire de B : $B(0;-20+3t)$.
À minimiser $\delta(A;B)=\|\overrightarrow{AB}\|$, ce qui revient également à minimiser $\|\overrightarrow{AB}\|^2$.
$f(t)=\|\overrightarrow{AB}\|^2=(9-2t)^2+(-20+3t)^2=13t^2-156t+481.$ /2
f est une fonction quadratique avec coefficient $a>0$. Elle admet donc un minimum en

$$t=\frac{-(-156)}{2\cdot 13}=\frac{156}{26}=6$$

La distance entre A et B sera minimale après 6 secondes. /2

b) On veut connaître $g'(t)$ avec $g(t)=\sqrt{f(t)}$ lorsque $t=10$. /2
$g'(t)=\dfrac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}=\dfrac{26t-156}{2\sqrt{13t^2-156t+481}}=\dfrac{13(t-6)}{\sqrt{13t^2-156t+481}}$ /1
$g'(10)=\dfrac{52}{\sqrt{221}}=4\sqrt{\dfrac{13}{17}}\approx 3{,}4979$
Dix secondes après le départ, la distance entre les deux mobiles s'accroît de $3{,}4979\,\mathrm{m/s}$ /1

Corrigé problème 4

a) (s) est la sphère de centre $O(0;0;0)$ et de rayon $\sqrt{45}$. /1

C est la projection orthogonale de O sur (p) :

Appelons A un point quelconque de (p) et $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ son vecteur normal, alors

$$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} = \frac{-(-18)}{1+4+4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C(2;4;4)$$

/1

Par Pythagore, $r = \sqrt{45 - \|\overrightarrow{OC}\|} = \sqrt{45-36} = 3$ /1

b) $B(20;4;-5) \in (d)$. Comme $20+8-10-18=0$, $B \in (p)$.

Vecteur directeur de (d) : $\vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \perp \vec{n}$ car $\vec{d} \cdot \vec{n} = 2+2-4=0$.

Alternativement $(20+2k)+2(4+k)+2(-5-2k)-18=0$

Tout point de (d) vérifie bien l'équation du plan $(p) \Rightarrow (d) \in (p)$. /1

c) On cherche $P \in (d)$ tel que $\delta(P,(s))$ soit minimale.

Cela revient à chercher P de la forme $(20+2k; 4+k; -5-2k)$ tel que $\delta(P,O)$ soit minimale.

On peut également calculer la projection orthogonale de O sur (d) :

$\overrightarrow{BP} = \frac{\overrightarrow{BO} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\|^2}\vec{d} = \frac{-(40+4+10)}{4+1+4} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}$ et

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow P(8;-2;7)$ /2

d) Cherchons le point de tangence T d'une tangente à (c) dont la direction est donnée par $\vec{d}$. Nous avons comme contraintes que $\overrightarrow{CT} \perp \vec{d}$, $\overrightarrow{CT} \perp \vec{n}$ et $\|\overrightarrow{CT}\| = 3$.

Choisissons un vecteur $\vec{e}$ orthogonal à $\vec{d}$ et $\vec{n}$:

$\vec{e} = \vec{d} \times \vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{CP}$ /1

$\overrightarrow{CT} = \pm 3 \cdot \frac{\vec{e}}{\|\vec{e}\|} = \pm\frac{3}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CT} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ /1.5

$\begin{cases} x = 4+2k \\ y = 2+k \\ z = 5-2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$ ou $\begin{cases} x = 2k \\ y = 6+k \\ z = 3-2k \end{cases} (k \in \mathbb{R})$. /0.5

Corrigé problème 5

a) Pour $0 \leq x < x + \Delta x \leq 30$:

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) = \frac{\pi(x+\Delta x)^2 - \pi x^2}{\pi \cdot 30^2} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{900}$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x + \Delta x}{900} = \frac{x}{450}$$

Finalement, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{450} & \text{pour } 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Alternativement, $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ \dfrac{\pi \cdot x^2}{\pi \cdot 30^2} = \dfrac{x^2}{900} & \text{pour } 0 \leq x \leq 30 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{900} = \dfrac{x}{450} & \text{pour } 0 \leq x \leq 30 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ /3

b) $E(x) = \displaystyle\int_0^{30} x\, f(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{30} \frac{x^2}{450}\, \mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{1350}\right|_0^{30} = 20$ /1

c) /2

y_i	2	1	-1
p_i	$\frac{\pi \cdot 10^2}{\pi \cdot 30^2} = \frac{1}{9}$	$\frac{\pi \cdot (20^2 - 10^2)}{\pi \cdot 30^2} = \frac{3}{9}$	$\frac{\pi \cdot (30^2 - 20^2)}{\pi \cdot 30^2} = \frac{5}{9}$

d) $E(Y) = \frac{2}{9} + \frac{3}{9} - \frac{5}{9} = 0$: il est équitable. /1

e) $V(Y) = E(Y^2) - 0 = \frac{4}{9} + \frac{3}{9} + \frac{5}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$ /1

$$T = \sum_{i=1}^{300} Y_i \Rightarrow E(T) = 0 \text{ et } V(T) = 400 \Rightarrow S(T) = 20$$

Comme T s'approche de $Z \sim \mathcal{N}(0; 20)$: /1

$P(T > 10) \approx P(Z > 10{,}5) = 1 - \Phi\left(\frac{10{,}5}{20}\right) = 1 - \Phi\left(0{,}525\right) \approx 1 - 0{,}700 = 0{,}300$

Environ 30%. /1

Corrigé problème 6

a) $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} \\ 0 \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b} = -\frac{4}{5} \cdot \vec{\imath} - \frac{3}{5} \cdot \vec{k}$ /2

b) $\begin{cases} \vec{a} = -\frac{3}{5} \cdot \vec{\imath} + \frac{4}{5} \cdot \vec{k} \\ \vec{b} = -\frac{4}{5} \cdot \vec{\imath} - \frac{3}{5} \cdot \vec{k} \\ \vec{c} = -\vec{\jmath} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{\imath} = 1 \cdot \left(-\frac{3}{5} \cdot \vec{a} - \frac{4}{5} \cdot \vec{b}\right) & = -\frac{3}{5} \cdot \vec{a} - \frac{4}{5} \cdot \vec{b} \\ \vec{k} = 1 \cdot \left(\frac{4}{5} \cdot \vec{a} - \frac{3}{5} \cdot \vec{b}\right) & = \frac{4}{5} \cdot \vec{a} - \frac{3}{5} \cdot \vec{b} \\ \vec{\jmath} = -\vec{c} \end{cases}$ /2

c) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ /1

d) De b) $P = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

$$A = P \cdot A' \cdot P^{-1} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -4 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 & -12 \\ 0 & 25 & 0 \\ -12 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$ /2

e) $B \cdot [\vec{a}] = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 24 \\ 0 & 25 & 0 \\ 24 & 0 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$

$\vec{a}$ est bien un vecteur propre de g avec -1 comme valeur propre associée. /1

f) $B - \lambda \cdot I_3 = \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 7-25\lambda & 0 & 24 \\ 0 & 25-25\lambda & 0 \\ 24 & 0 & -7-25\lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 7-25\lambda & 0 & 24 \\ 0 & 25-25\lambda & 0 \\ 24 & 0 & -7-25\lambda \end{vmatrix} = 25 \cdot (1-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 7-25\lambda & 24 \\ 24 & -7-25\lambda \end{vmatrix} =$$

$25 \cdot (1-\lambda) \cdot (625\lambda^2 - 625) = -5^6 \cdot (\lambda-1)^2 \cdot (\lambda+1)$

$\det(B - \lambda \cdot I_3) = 0 \Leftrightarrow \det(25 \cdot (B - \lambda \cdot I_3)) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ou $\lambda = -1$. /1

$\lambda = 1 : \begin{pmatrix} -18 & 0 & 24 \\ 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & -32 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_1 = \{x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k} | x = \frac{4}{3} z\} = L\left(\frac{4}{3}\vec{\imath} + \vec{k}; \vec{\jmath}\right) = L(\vec{b}; \vec{c})$ /1.5

$E_{-1} = L(\vec{a})$ /0.5

g est la symétrie orthogonale par rapport au plan vectoriel $L(\vec{b}; \vec{c})$. /1

g) Valeur propre de $1 \cdot (-1) = -1$ pour le vecteur propre $\vec{a}$ de $f \circ g$.

Valeur propre de $0 \cdot 1 = 0$ pour le vecteur propre $\vec{b}$ de $f \circ g$.

Valeur propre de $1 \cdot 1 = 1$ pour le vecteur propre $\vec{c}$ de $f \circ g$. /2