Examens de maturité 2017

Mathématiques Fortes	DF	5B, 5C, 5D	Version A

Problème 1

Soit la fonction donnée par $f(x) = \dfrac{2\sqrt{\ln(x)}}{x}$.

1. Faire l'étude complète de la fonction f et construire sa représentation graphique.
2. Soit $b > 1$. Calculer le volume $V(b)$ du corps de révolution engendré par la rotation du domaine limité par la courbe représentative de f, l'axe O_x et les droites d'équations $x = 1$ et $x = b$.
3. Déterminer $\lim\limits_{b \to +\infty} V(b)$.

Problème 2

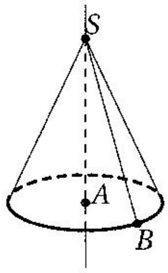
1. (a) On définit une similitude directe de centre $A(1,-2)$, de rapport $\rho = 2\sqrt{2}$ et d'angle $\alpha = -\dfrac{\pi}{4}$. Déterminer la fonction f associée à cette transformation du plan complexe S.
   (b) On définit de même la transformation T associée à la fonction complexe donnée par $g(z) = \dfrac{-1-i}{4}z$. Déterminer les éléments caractéristiques de T.
   (c) Déterminer la fonction complexe h associée à la transformation T $\circ$ S du plan complexe .
2. Soit la fonction complexe définie par $p(z) = \left(1 - i\sqrt{3}\right) \cdot z - \sqrt{3} - 2i$.
   (a) Déterminer l'image de $\sqrt{3} - i$.
   (b) Quels nombres complexes $z = x + yi$ ont une image réelle par la fonction p ?
   Que représentent-ils dans le plan complexe ?
   (c) Déterminer la préimage de 0.
   (d) Déterminer l'ensemble M des nombres complexes z tels que $p(z) = \dfrac{1}{z}$.

Problème 3

Dans l'espace E_3 muni d'un repère orthonormé, on donne la sphère Σ d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x-8=0$, le plan α d'équation cartésienne $x+y+z-4=0$ et la droite d d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x=10-3k \\ y=k \\ z=-9+4k \end{cases} \quad \text{avec } k\in\mathbb{R}$$

1. Déterminer le centre W et le rayon R de la sphère Σ.
2. Le plan α coupe la sphère en un cercle Γ.
   (a) Montrer que $A(2;1;1)$ est le centre de ce cercle.
   (b) Déterminer le rayon r de ce cercle.
   (c) Montrer que $B(0;2;2)$ est élément de ce cercle.
3. Déterminer les équations cartésiennes des plans π_1 et π_2 de la forme $x+ay+bz+c=0$ contenant la droite d et tangent à la sphère Σ.
4. Soit Ω un cône circulaire droit de sommet $S(4;3;3)$ dont l'axe passe par A et dont (BS) est une génératrice.



   (a) Soit β le plan tangent au cône Ω en B, c'est à dire un plan ayant une droite commune avec ce cône. Montrer que l'équation cartésienne de ce plan est $-x+2y+2z-8=0$.
   (b) Ce plan est-il tangent à la sphère Σ ?

Problème 4

Un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ est donné par sa matrice A relativement à la base canonique.

$$A=\begin{pmatrix} 1+m & -1 & m \\ -1 & 1 & -1 \\ m & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{où } m\in\mathbb{R}$$

1. Pour quelles valeurs du paramètre réel m l'application f est-elle bijective ?
2. On pose $m=4$. Donner la dimension et une base du noyau et de l'image de f.
3. On pose $m=1$.
   (a) Calculer A^2 et A^{-1}.
   (b) Écrire l'image d'un vecteur $(x;y;z)$ de $\mathbb{R}^3$ par $f\circ f$ et par ${}^{r}f$.
   (c) En déduire la solution de l'équation $f\big((x;y;z)\big)=(1;-2;2)$.

[redacted]