Tous les problèmes ont le même poids pour le calcul de la note.

Problème 1

On considère les courbes paramétriques

$$c_1 : \begin{cases} x = \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ y = \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{cases} \quad \text{et} \quad c_2 : \begin{cases} x = \frac{1}{2}(4-\pi)t^3 + \frac{1}{2}(\pi - 6)t^2 + 1 \\ y = \frac{1}{2}(\pi - 4)t^3 + (3-\pi)t^2 + \frac{\pi}{2}t \end{cases} \quad \text{avec } t \in [0; 1] \text{ pour les 2 courbes.}$$

La courbe c_1 est un quart du cercle unité et la courbe c_2 est proche de la courbe c_1 .

a) Montrer qu'en $t = 0$ et $t = 1$ les deux courbes passent par le même point avec des vecteurs vitesse égaux.

b) En $t = \frac{1}{2}$, la courbe c_1 passe par un point P_1 et la courbe c_2 passe par un point P_2.
Vérifier que pour chacun de ces points l'abscisse est égale à l'ordonnée, puis calculer la distance entre ces deux points.

c) Montrer qu'en $t = \frac{1}{2}$ les vecteurs vitesse des deux courbes sont parallèles.

d) Programmer une représentation graphique de la courbe c_2 composée de 256 segments rectilignes.
On suppose que les fonctions

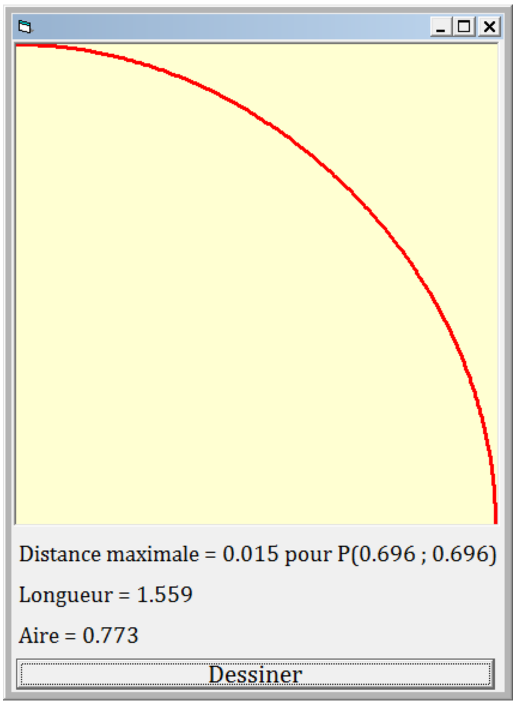
$$f(t) = \frac{1}{2}(4-\pi)t^3 + \frac{1}{2}(\pi - 6)t^2 + 1 \quad \text{et}$$
$$g(t) = \frac{1}{2}(\pi - 4)t^3 + (3-\pi)t^2 + \frac{\pi}{2}t$$

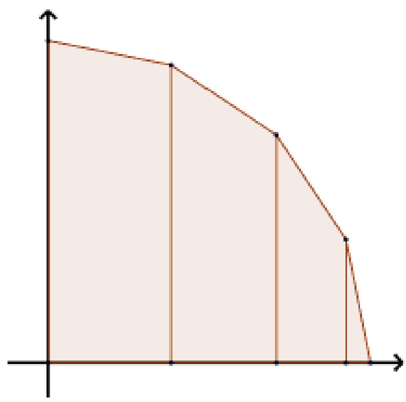
sont déjà programmées.
Le dessin se fera dans *Picture1*, une zone graphique carrée dont les pixels auront des coordonnées comprises entre 0 et 400.
On rappelle que dans une zone graphique l'origine $O(0; 0)$ se trouve en haut à gauche.

Le programme devra en plus calculer et afficher avec 3 décimales les informations suivantes :

- le point de la courbe c_2 le plus éloigné de la courbe c_1 ainsi que la distance entre ce point et la courbe ;
- la longueur de la courbe c_2 ;
- l'aire de la surface comprise entre la courbe c_2 et l'axe des abscisses.

Pour le calcul de la longueur et de l'aire, s'inspirer de l'illustration ci-contre dans laquelle on a approché la courbe par 4 segments rectilignes.





Problème 2

On se propose d'approcher le graphe une solution d'une équation différentielle par des arcs de cubique.

On s'intéresse à la solution s de l'équation différentielle $y' = 8x^2 - 4y^2 - 1$ avec la condition initiale $s(0) = \frac{1}{2}$.

a) Estimer, par la méthode d'Euler avec un pas $h = \frac{1}{2}$, la valeur de $s(1)$ et de $s'(1)$.

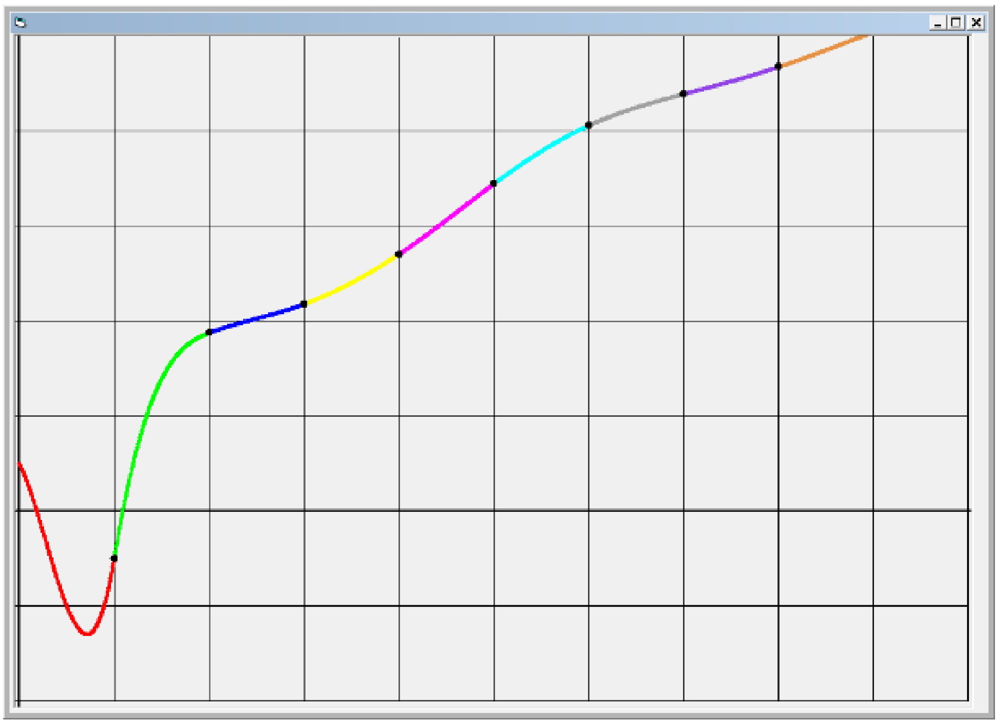
b) Déterminer les coefficients a, b, c et d de la fonction $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ de sorte que $p(0) = s(0) = \frac{1}{2}$, $p'(0) = s'(0) = -2$, $p(1) = -\frac{1}{2}$ et $p'(1) = 6$.
Déterminer le minimum du graphe de p.
Calculer une estimation du zéro de p compris dans l'intervalle $[0; 1]$ en utilisant un pas de la méthode de Newton avec la valeur initiale $x = 0$.
Dessiner finalement le graphe de p pour $x \in [0; 1]$.

c) Écrire un programme qui calcule et affiche une estimation de $s(1)$ et une estimation de $s'(1)$ en utilisant la méthode de Runge avec un pas $h = \frac{1}{256}$.

d) On suppose maintenant que l'on dispose d'une procédure $Cubique(x0, y0, p0, x1, y1, p1)$ qui trace, pour des x variant entre $x0$ et $x1$, le graphe de la cubique c telle que $c(x0) = y0$, $c'(x0) = p0$, $c(x1) = y1$ et $c'(x1) = p1$.

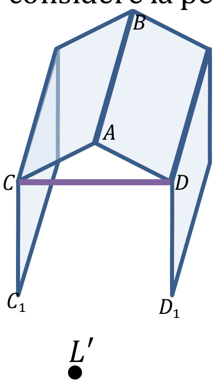
L'instruction *Call* $Cubique(0,1,-1,1,0,2)$ tracera par exemple le graphe de la cubique d'extrémités $(0; 1)$ et $(1; 0)$ ayant une pente égale à -1 en $x = 0$ et à 2 en $x = 1$. Si cette instruction est suivie, par exemple, par l'instruction *Call* $Cubique(1,0,2,2,3,-2)$, le dessin sera complété par le graphe de la cubique d'extrémités $(1; 0)$ et $(2; 3)$ ayant une pente égale à 2 en $x = 1$ et à -2 en $x = 2$.

Écrire un programme qui utilise cette procédure *Cubique* pour dessiner une approximation de la solution s, pour x compris entre 0 et 10, par 10 arcs de cubique. Chaque arc de cubique relie deux points, d'abscisses entières et consécutives, du graphe de l'estimation de s obtenue par la méthode de Runge avec un pas de $\frac{1}{256}$.



Problème 3

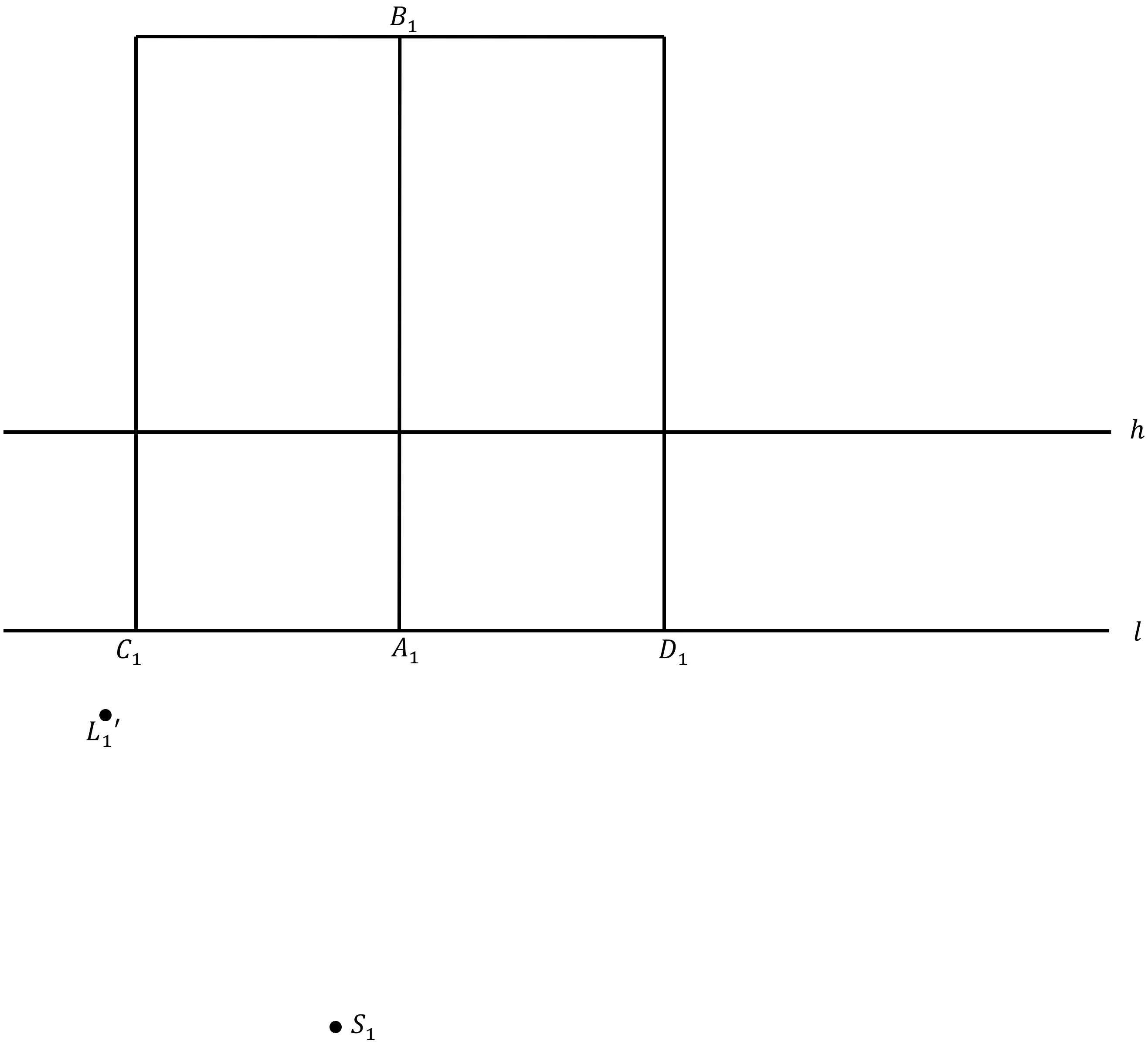
On considère la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l et de ligne d'horizon h.



a) Construire la perspective de la maquette d'un abri constitué de 2 façades verticales et d'un toit à 2 pans donné par sa projection dans le sol. La hauteur du faîte du toit (AB) est égale à 8 cm, celle des façades latérales est égale à 6 cm. Une poutre relie les points C et D.

b) L'abri est éclairé par une source lumineuse ponctuelle L donnée par $L_1{}'$ et L'. Construire la perspective de l'ombre de l'abri sur le sol.

c) Construire la perspective de la partie éclairée de l'intérieur de l'abri sans oublier l'ombre de la poutre.



Problème 1

$$c_1: \begin{cases} x = \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ y = \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{cases} \text{ et } c_2: \begin{cases} x = \frac{1}{2}(4-\pi)t^3 + \frac{1}{2}(\pi-6)t^2 + 1 \\ y = \frac{1}{2}(\pi-4)t^3 + (3-\pi)t^2 + \frac{\pi}{2}t \end{cases} \quad t \in [0;1].$$

$$\vec{v}_1 = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} -\sin(\frac{\pi}{2}t) \\ \cos(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(4-\pi)t^2 + (\pi-6)t \\ \frac{3}{2}(\pi-4)t^2 + (6-2\pi)t + \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}.$$

a) En $t = 0$ on a pour les 2 courbes $P_{t=0}(1;0)$ et $\vec{v}(0) = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En $t = 1$ on a pour les 2 courbes $P_{t=1}(0;1)$ et $\vec{v}(1) = \frac{\pi}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $t = \frac{1}{2} \Rightarrow P_1\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $P_1(0{,}707;0{,}707)$,et $P_2\left(\frac{\pi+8}{16};\frac{\pi+8}{16}\right)$ ou $P_2(0{,}696;0{,}696)$.

De plus $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi+8}{16}\right) \cong 0{,}015$.

c) En $t = \frac{1}{2}$, $\vec{v}_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cong 1{,}111\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{12-\pi}{8}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cong 1{,}107\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d)
```
Private Sub Command1_Click()
Let x0 = f(0)
Let y0 = g(0)
Let xe = 400
Let ye = 400
Picture1.PSet (xe, ye)
Let pas = 1 / 256
For t = pas To 1 Step pas
   Let x1 = f(t)
   Let y1 = g(t)
   Let xe = Int(400 * X1 + 0.5)
   Let ye = Int(400 - 400 * Y1 + 0.5)
   Picture1.Line -(xe, ye)
   Let dist = Abs(Sqr(X1 ^ 2 + Y1 ^ 2) - 1)
   If dist > dmax Then
      Let dmax = dist
      Let tmax = t
   End If
   Let longueur = longueur + Sqr((x1 - x0) ^ 2 + (y1 - y0) ^ 2)
   Let aire = aire + (y0 + y1) / 2 * (x0 - x1)
   Let x0 = x1
   Let y0 = y1
Next t
Let x = Int(1000 * f(tmax) + 0.5) / 1000
Let y = Int(1000 * g(tmax) + 0.5) / 1000
Let Label1.Caption = "Distance maximale = " & dmax & " pour P(" & x & " ; " & y & ")"
Let Label2.Caption = "Longueur = " & longueur
Let Label3.Caption = "Aire = " & aire
End Sub.
```

Problème 2

a)

x	y	$p = 8x^2 - 4y^2 - 1$
0	$\frac{1}{2}$	-2
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
1	$-\frac{1}{2}$	6

b) $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{1}{2}$ $\quad p(1) = ax^3 + bx^2 + cx + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \Longrightarrow\ a + b + c = -1$

$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad p'(0) = -2$

$\Longrightarrow c = -2,\ \ p'(1) = 6 \Longrightarrow 3a + 2b - 2 = 6$

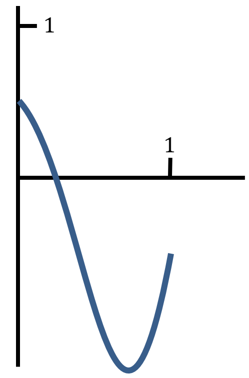
$\begin{cases} a + b = 1 \\ 3a + 2b = 8 \end{cases} \Longrightarrow a = 8 - 2 = 6, b = -5$

$p(x) = 6x^3 - 5x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

$p'(x) = 18x^2 - 10x - 2 \quad p'(x) = 0$

$\Longrightarrow x = \frac{5 \mp \sqrt{61}}{18} \cong 0{,}7, y = -1{,}3$

Zéro avec un pas de Newton en partant de $x = 0$: $x_1 = 0 - \frac{\frac{1}{2}}{-2} = \frac{1}{4}$



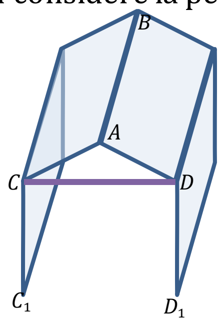
c)
```
Function f(x, y)
  Let f = 8*x ^ 2 – 4*y ^ 2-1
End Function

Private Sub Picture1_Click()
  Let h = 1 / 256
  Let x = 0: Let y = ½
  Do
    Let xm = x + h / 2
    Let ym = y + h / 2 * f(x, y)
    Let x = x + h
    Let y = y + h * f(xm, ym)
  Loop Until x >= 1
  Let Label1.Caption = y
  Let Label2.Caption = f(x, y)
End Sub
```

d)
```
Let h = 1 / 256
Let x = 0
Let y = 1 / 2
Let i = 0
Let x0 = x
Let y0 = y
Do
  Let i = i + 1
  Let xm = x + h / 2
  Let ym = y + h / 2 * f(x, y)
  Let x = x + h
  Let y = y + h * f(xm, ym)
  If i = 256 Then
    Let i = 0
    Call cubique(x0, y0, f(x0, y0), x, y, f(x, y))
   Let x0 = x
   Let y0 = y
  End If
Loop Until x >= 10
```

Problème 3

On considère la perspective de centre S sur l'écran donné par la droite l et de ligne d'horizon h.



a) Construire la perspective de la maquette d'un abri constitué de 2 façades verticales et d'un toit à 2 pans donné par sa projection dans le sol. La hauteur du faîte du toit (AB) est égale à 8 cm, celle des façades latérales est égale à 6 cm. Une poutre relie les points C et D.

b) L'abri est éclairé par une source lumineuse ponctuelle L donnée par $L_1{}'$ et L'. Construire la perspective de l'ombre de l'abri sur le sol.

c) Construire la perspective de la partie éclairée de l'intérieur de l'abri sans oublier l'ombre de la poutre.