



Mathématiques standard

Durée de l'épreuve : 180 minutes

Ouvrage et matériel autorisés : Formulaires et tables numériques

Calculatrice

Barème : 50 points correspondent à la note 6.

Nom – Prénom :

Numéro :

Classe :

Problème 1 (20 points)

1.1 On donne la fonction

$$f(x) = \frac{1}{2} x e^{-x^2}$$

- (a) Étudier la parité de f .
- (b) À l'aide de la règle de l'Hospital, calculer $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.
- (c) En justifiant les calculs, déterminer tous les maximums et minimums de f .
- (d) Déterminer la primitive F de f telle que $F(0) = 1$.

1.2 On donne les fonctions

$$g(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ et } h(x) = \sqrt{1+x}.$$

- (a) Calculer les coordonnées des points d'intersection des graphes de g et h .
- (b) Quelle est la différence maximale $h(x) - g(x)$ pour x allant de -1 à 3 ?
- (c) Esquisser le domaine borné délimité par les graphes de g et h puis calculer l'aire de ce domaine.
- (d) Soit D le domaine borné du premier quadrant délimité par le graphe de g , celui de h et l'axe des y .
Calculer le volume du corps de révolution engendré par la rotation de D autour de l'axe des y .

Problème 2 (17 points)

Dans un repère orthonormé, on définit les éléments suivants :

- les points $A(3; -4; 3)$ et $B(1; 2; 3)$;
- le plan $p : x + y = 2$;
- la droite $d : \begin{cases} x = -1 - 3k \\ y = 2 + 4k \\ z = 3 + 3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}.$

- 2.1 Déterminer la distance de A à l'axe des z .
- 2.2 Calculer la distance de l'axe des z à la droite d .
- 2.3 Calculer la distance de l'axe des z au plan p .
- 2.4 Déterminer l'équation cartésienne du plan parallèle à d contenant l'axe des z .
- 2.5 Calculer le point d'intersection I de la droite (AB) avec le plan p . Puis montrer que le point I est situé entre les points A et B .
- 2.6 Déterminer l'équation d'une sphère de rayon $\sqrt{2}$ centrée sur le plan (Oxy) qui est tangente au plan p et à l'axe des z .

Problème 3 (15 points)

Une boîte contient 8 billets numérotés 1,2,3,4,5,5,8 et 8.

Les trois parties du problème peuvent être résolues indépendamment.

3.1 Dénombrement

En tirant **successivement et sans remise** des billets de cette boîte, on peut former des nombres en alignant de gauche à droite les chiffres tirés (par exemple, le nombre 1525 avec les chiffres 1,5,2,5 tirés dans cet ordre, mais pas 282 puisque le chiffre 2 n'est qu'une fois dans la boîte).

Combien peut-on ainsi former de nombres différents

- (a) de 8 chiffres ?
- (b) de 8 chiffres, le chiffre 1 se trouvant juste à gauche de 2 ?
- (c) de 8 chiffres, le chiffre des unités ne pouvant être que 2 ou 8 ?

3.2 Probabilités

De cette boîte, on tire les billets au hasard, **successivement et sans remise**.

- (a) On tire tous les billets. Quelle est la probabilité d'obtenir tous les billets portant des numéros pairs en premier ?
- (b) On tire 3 billets. Quelle est la probabilité de ne tirer que des billets portant des numéros impairs ?
- (c) On tire 2 billets. Sachant que le numéro du second billet tiré est strictement plus petit que celui du premier, quelle est la probabilité que le premier billet tiré porte le numéro 5 ?

3.3 Variable aléatoire

Après avoir enlevé les numéros pairs, il reste dans la boîte 4 billets numérotés 1, 3, 5 et 5.

On tire au hasard 2 billets **simultanément** de cette boîte ne comptant plus que 4 billets. La somme des chiffres obtenus correspond au gain en frs (par exemple, si on a tiré les chiffres 1 et 5 alors le gain est 6 frs).

Appelons G la variable aléatoire associée au gain de ce jeu.

- (a) Donner la loi de probabilité de G .
- (b) Calculer l'espérance de G .