Mathématiques niveau I

Problème 1 (poids 4)

On considère la fonction f définie par $f(x) = (ax + 3)e^{-x}$, où a est un nombre réel.

a) Montrer que, pour tout nombre $a \neq 0$, le graphe de f possède un seul point à tangente horizontale et déterminer la valeur de a pour laquelle l'abscisse de ce point vaut -2.

Pour la suite du problème, on pose $a = 1$, donc $f(x) = (x + 3)e^{-x}$.

b) Déterminer les points d'intersection du graphe de f avec les axes, l'équation de l'asymptote et le point à tangente horizontale du graphe de f. Dessiner le graphe de f en prenant deux carreaux comme unité.

c) Déterminer l'équation de la tangente t au graphe de f au point où ce graphe coupe l'axe des x. Donner la solution avec des valeurs exactes.

d) Déterminer $I(b) = \int_0^b f(x)dx$ avec $b > 0$ et calculer la limite de $I(b)$ lorsque $b \to \infty$.

On considère la fonction g définie par $g(x) = (x + 3)e^{-x} + 2$.

e) Dans le même repère que le graphe de f, dessiner le graphe de g et hachurer la surface fermée délimitée par les deux graphes, l'axe des y et la droite verticale $x = -3$. Calculer l'aire de cette surface.

f) Déterminer les valeurs de c pour lesquelles la droite horizontale $y = c$ coupe le graphe de g en un seul point.

Problème 2 (poids 3)

On considère la droite d_1 passant par les points $A(0;0;5)$ et $B(2;0;1)$,
la droite d_2 passant par les points $B(2;0;1)$ et $C(1;k;3)$ avec $k \in \mathbb{R}$,
le plan $\pi : 2x + z - 5 = 0$.

a) Quelle est la position relative du plan π et de la droite d_2 ?

b) Montrer que, pour toutes les valeurs de k, le triangle ABC est isocèle.

c) Déterminer les valeurs de k pour lesquelles l'aire du triangle ABC vaut $2\sqrt{5}$.

Pour la suite du problème, on pose $k = 2$, donc d_2 passe par $B(2;0;1)$ et $C(1;2;3)$.

d) Sur la feuille annexée, dessiner la droite d_2 en montrant clairement ses traces dans le mur, la paroi et le sol. Dessiner également les traces du plan π.

e) Calculer l'angle aigu entre les droites d_1 et d_2.

f) Déterminer l'équation de la plus petite sphère contenant les points A et B.

On considère également la sphère $\mathcal{S}$ de centre $C(1;2;3)$ et de rayon $r = 3$.

g) Déterminer les équations des plans π_1 et π_2 perpendiculaires à d_2 et tangents à $\mathcal{S}$.

h) Vérifier que le point A appartient à $\mathcal{S}$ puis déterminer des équations paramétriques de la droite t tangente à $\mathcal{S}$ en A et perpendiculaire à la droite d_1.

Problème 3 (poids 3)

Le tableau suivant présente les différentes cartes d'un jeu de dix cartes colorées.

	valeur d'une carte
1 carte bleue	x points, $x > 8$
4 cartes rouges	8 points
3 cartes vertes	6 points
2 cartes jaunes	2 points

a) Déterminer, en fonction de x, la moyenne des points des cartes du jeu puis calculer la valeur de x afin que cette moyenne soit égale à la médiane des points.

b) Lucien aligne les dix cartes devant lui. Combien de dispositions différentes y-a-t-il ?

c) Lucien tire successivement quatre cartes au hasard, sans remise. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré quatre cartes de couleurs différentes ?

Pour la suite du problème, on considère que le nombre de points x vaut 10.

d) Albert tire deux cartes sans remise et obtient 12 points. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré deux cartes vertes ?

Albert tire une carte, note le nombre de points et remet la carte dans le paquet. Puis Lucien fait la même chose. Le gagnant du jeu est celui qui a obtenu le plus de points.

e) Montrer que, lors d'un jeu, la probabilité d'avoir un match nul vaut $p = 0.3$.

f) Albert et Lucien font cinq jeux. Quelle est la probabilité que Lucien gagne exactement trois parties ?

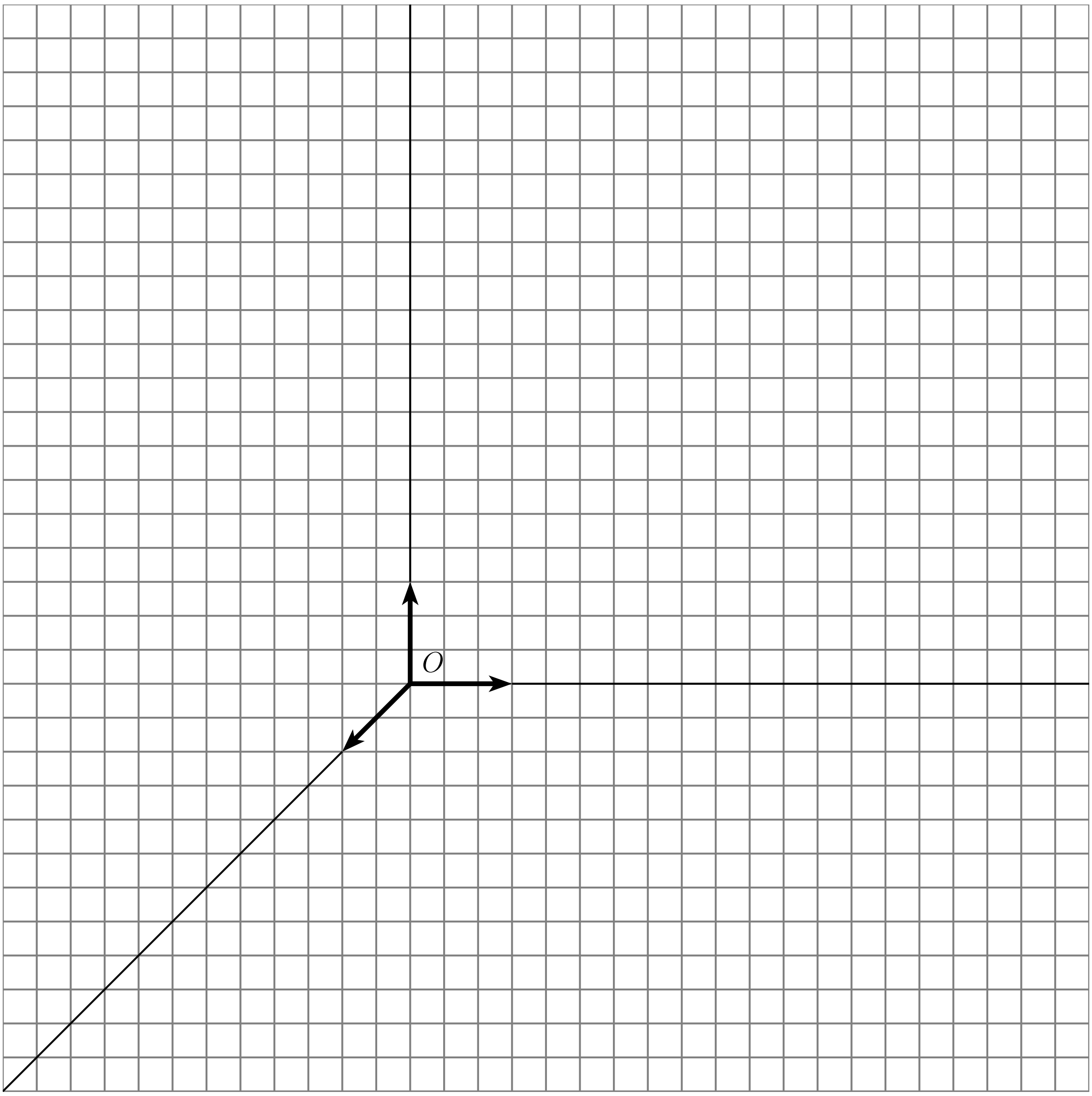
Fabrice a fabriqué les cartes de ce jeu. Il a remarqué que la masse d'une carte suit une loi normale de moyenne 20 grammes et d'écart-type 2 grammes.

g) Quelle est la probabilité que la masse d'une carte soit inférieure à la masse moyenne ?

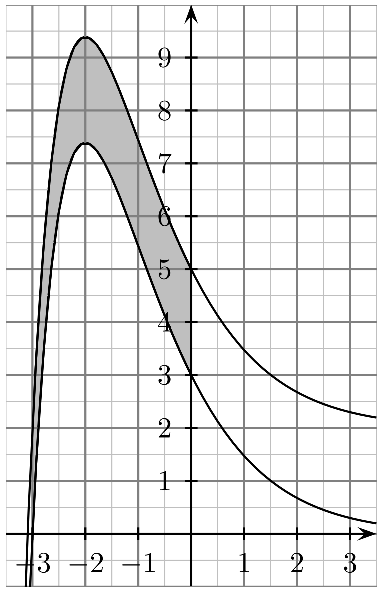
h) Quelle est la probabilité que la masse d'une carte soit supérieure à 21 grammes ?

Annexe pour le problème 2

Nom et prénom : ....   Classe : ....



Problème 1



a) $f'(x) = ae^{-x} - (ax+3)e^{-x} = (-ax+a-3)e^{-x}$ s'annule uniquement lorsque $x = \frac{a-3}{a}$, ce qui vaut -2 lorsque $a - 3 = -2a$, $3a - 3 = 0$, $a = 1$.

b) $I_x(-3;0)$, $I_y(0;3)$, A.H. $y = 0$ (lorsque $x \to \infty$) et p.t.h. en $H(-2;e^2)$ (on a $f'(x) = (-x-2)e^{-x}$).

c) $f(-3) = 0$, $f'(-3) = e^3$
$t : y = 0 + e^3(x - (-3))$, $y = e^3x + 3e^3$.

d) Avec une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (x+3)e^{-x}dx = -(x+3)e^{-x} + \int e^{-x}dx \\ &= -(x+3)e^{-x} - e^{-x} = -(x+4)e^{-x} \end{aligned}$$

donc $I(b) = F(b) - F(0) = -(b+4)e^{-b} + 4 \underset{b\to\infty}{\longrightarrow} 4$

e) Aire $= \displaystyle\int_{-3}^{0} \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_{-3}^{0} 2dx = \Big[2x\Big]_{-3}^{0} = 0 - (-6) = 6.$

f) Selon le dessin, on a $c \leqslant 2$ ou $c = 2 + e^2$.

Problème 2 : au verso

Problème 3

a) $\mu = \dfrac{54+x}{10}$, ce qui vaut 7 lorsque $54 + x = 70$, donc $x = 16$

b) $\dfrac{10!}{1!2!3!4!} = 12'600$

c) $\dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{2}{8} \cdot \dfrac{1}{7} \cdot 4! = \dfrac{4}{35} \cong 0.114$

d) $\mathbb{P}(\langle 10+2\rangle, 6+6) = 2 \cdot \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{2}{9} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{2}{45} + \dfrac{3}{45} = \dfrac{5}{45} = \dfrac{1}{9}$
La probabilité conditionnelle cherchée est $\dfrac{3/45}{5/45} = \dfrac{3}{5}$.

e) $\mathbb{P}(10+10, 8+8, 6+6, 2+2) = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} + \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{2}{10} + \dfrac{3}{10} \cdot \dfrac{3}{10} + \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{4}{10} = \dfrac{30}{100} = 0.3.$

f) $\mathbb{P}(\text{Lucien gagne}) = \mathbb{P}(\text{Albert gagne}) = \dfrac{1-0.3}{2} = 0.35.$
$\mathbb{P}(\text{Lucien gagne 3 parties sur 5}) = \dbinom{5}{3}(0.35)^3(0.65)^2 \cong 0.18115$

g) $\mathbb{P}(X \leqslant 20) = \mathbb{P}(Z \leqslant 0) = 0.5$

h) $\mathbb{P}(X \geqslant 21) = \mathbb{P}(Z \geqslant 0.5) = 1 - \mathbb{P}(Z \leqslant 0.5) \cong 1 - 0.6915 = 0.3085$

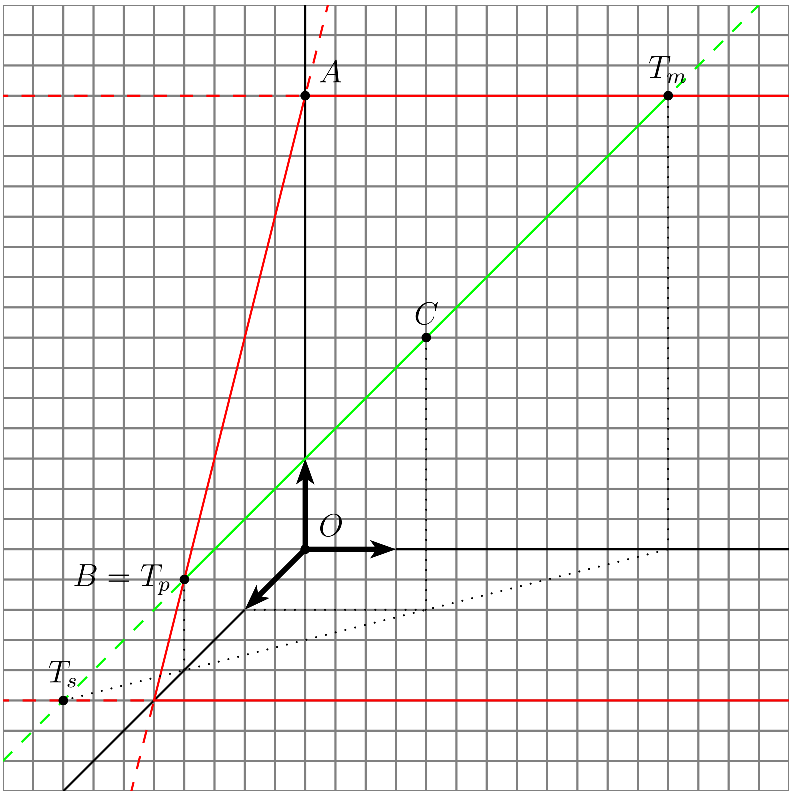
Problème 2

a) $d_2 : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = k\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$ La droite d_2 est contenue dans le plan π.

b) $\| \overrightarrow{AC} \| = \| \overrightarrow{BC} \| = \sqrt{5 + k^2}$. Le triangle est donc isocèle en C.

c) $Aire = \frac{1}{2}\sqrt{20 \cdot k^2} = |k|\sqrt{5}$ vaut $2\sqrt{5}$ lorsque $k = \pm 2$

d)



$T_m(0;4;5)$
$T_p(2;0;1)$
$T_s(2.5;-1;0)$

e) $\alpha = \sphericalangle_a \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = \cos^{-1}\left(\frac{|-10|}{3\sqrt{20}} \right) \cong 41.81°$

f) La sphère est centrée au point $M(1;0;3)$, milieu du segment AB. Son équation est $(x-1)^2 + y^2 + (z-3)^2 = 5$, le membre de droite étant le calibrage pour avoir $A \in \mathcal{S}$.

g) On cherche $\pi_{1,2} : x - 2y - 2z + d = 0$ avec $\text{dist}(C, \pi_{1,2}) = 3$, $\frac{|d-9|}{3} = 3$, $|d-9| = 9$, $d - 9 = \pm 9$ donc $d = 9 \pm 9 \in \{0; 18\}$. Au final, on a les équations $\pi_1 : x - 2y - 2z = 0$ et $\pi_2 : x - 2y - 2z + 18 = 0$.

h) La droite t passe par $A(0;0;5)$ et un vecteur directeur est donné par $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} /\!/ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

donc $t : \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 0 \\ z = 5 + \lambda \end{cases}$