ETAT DE FRIBOURG
STAAT FREIBURG

Kollegium St. Michael KSMI
Collège St-Michel CSMI

Rue Saint-Pierre-Canisius 10, 1700 Fribourg

Maturité gymnasiale 2018

Mathématiques renforcées

Durée de l'épreuve :	180 minutes
Ouvrage et matériel autorisés :	Formulaires et Tables (mis à disposition par l'école)
	Calculatrice non progammable et non graphique
Barème :	50 points correspondent à la note 6

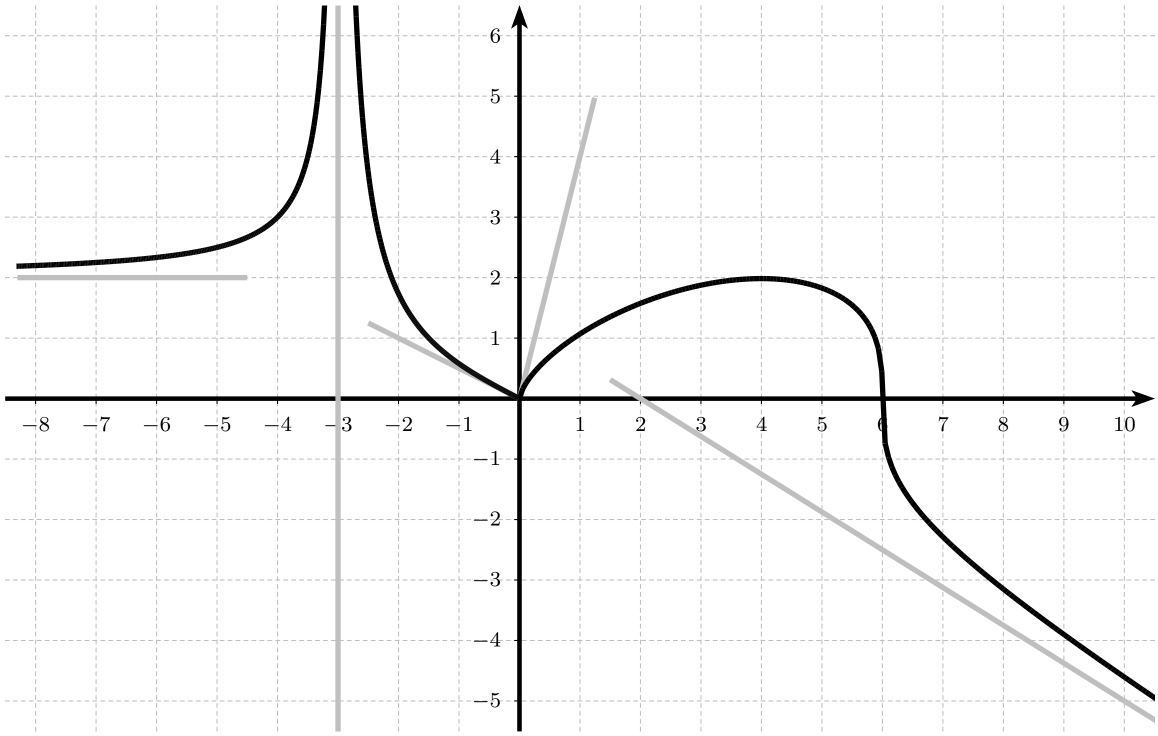
Nom-prénom : ....

Numéro : ....

Classe : ....

Problème 1 (12 points)

On considère la fonction réelle f, définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$, représentée ci-dessous en noir dans un repère orthonormé. Les trois asymptotes au graphe de f ainsi que deux demi-tangentes au graphe de f en $(0;0)$ sont représentées en gris. L'asymptote oblique au graphe de f passe par les points $(2;0)$ et $(10;-5)$. Le graphe de f n'a pas de point d'inflexion en dehors de la partie du plan représentée sur la figure.



1.1 Les ensembles de solutions des trois équations ci-dessous ne contiennent que des nombres **entiers**. Donner ces ensembles de solutions.

a) $f(x) = 0$ b) $f'(x) = 0$ c) $f''(x) = 0$

1.2 Déterminer les nombres **entiers** r, s, t, u, v et w qui sont tels que :

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = r$; c) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + \dfrac{t}{8}x = \dfrac{t}{4}$; e) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = v$;

b) $\lim\limits_{x \to s} f(x) = +\infty$; d) $\lim\limits_{x \to u} f'(x) = -\infty$; f) $\lim\limits_{x \to w} \dfrac{f(x) - f(w)}{x - w} = 1$.

1.3 On considère la fonction g définie par $g(x) = f'(x)$.

a) En admettant que g est définie sur $\mathbb{R}$ sauf en trois nombres **entiers**, donner ces trois nombres.

b) Donner le tableau de signes de g.

c) Déterminer les équations des quatre asymptotes au graphe de g.

d) Donner le tableau de signes de g'.

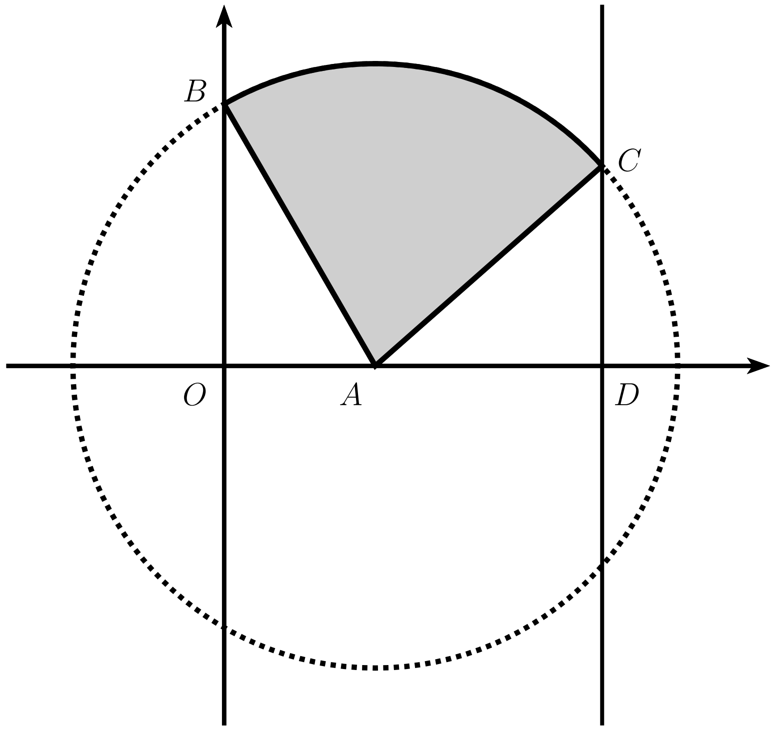
e) En admettant que le graphe de g possède un unique point d'inflexion d'abscisse $\dfrac{8}{3}$, représenter g dans un repère orthornormé (unité : 2 carrés).

1.4 Dans le repère orthonormé **donné en annexe à la page 5**, représenter la fonction h définie par

$$h(x) = f(x) \cdot \frac{x^2 - 16}{16 - x^2}.$$

Problème 2 (8 points)

Dans un repère orthonormé, on considère un cercle de rayon 4, dont le centre A est situé sur l'axe des abscisses. Ce cercle doit obligatoirement couper les verticales $x = 0$ et $x = 5$ en deux points B et C d'ordonnées supérieures ou égales à zéro. Sur la figure ci-dessous, O désigne l'origine du repère et D le point d'intersection de la droite $x = 5$ et de l'axe des abscisses.



Dans ce problème, on s'intéresse à l'aire du secteur circulaire grisé délimité par les rayons $[AB]$ et $[AC]$ et d'angle $\widehat{BAC}$, qui dépend de l'abscisse x de A.

2.1 Exprimer les angles $\widehat{BAO}$ et $\widehat{CAD}$ en fonction de l'abscisse x de A, et en déduire une expression de l'aire du secteur circulaire en fonction de x.

2.2 Etudier la variation de l'aire du secteur circulaire en fonction de l'abscisse x de A. En particulier, donner sa valeur minimale et sa valeur maximale.

Problème 3 (12 points)

Dans un repère orthonormé $(Oxyz)$, on considère les points $A(4; 0; 0)$, $B(0; 8; 0)$ et $C(0; 8; 4)$ ainsi que le plan

$$(p) : 2x + 6y + 3z = 18.$$

3.1 Représenter les plans (p) et (ABC) **avec leurs traces**.

3.2 Donner les équations paramétriques de la droite (d) d'intersection des plans (p) et (ABC).

3.3 Déterminer l'équation de (s), la plus petite sphère passant par les points A, B et C.

3.4 Déterminer les coordonnées du point D de l'axe (Oz) le plus proche de la droite (AC).

Problème 4 (11 points)

Remarque : les parties 4.1, 4.2 et 4.3 de ce problème sont indépendantes.

En Amérique du nord, il y a énormément d'écureuils de l'espèce dont le nom scientifique est Sciurus carolinensis.

4.1 Dans cette espèce, il y 53% d'écureuils gris, 39% d'écureuils noirs et 8% d'écureuils blancs. Ils sont si nombreux que dans les deux questions ci-dessous, on peut estimer que les pourcentages ne changent pas d'un écureuil à l'autre.

a) Calculer la probabilité que sur 20 écureuils observés, il y en ait 13 gris, 5 noirs et 2 blancs.

b) Vérifier par calcul qu'il faut avoir vu au moins 81 écureuils pour que la probabilité d'en avoir aperçu au moins deux blancs soit supérieure à 99%.

4.2 Pour un écureuil de cette espèce, on admet que la probabilité qu'il marche moins que 1 kilomètre en un jour est de 0.3 et que la probabilité qu'il marche moins de 2 kilomètres en un jour est de 0.86.

a) Calculer la probabilité qu'un écureuil ait marché moins de un kilomètre un jour où on sait qu'il en a marché moins de deux.

b) Calculer la probabilité qu'un écureuil ait marché au moins deux kilomètres un jour où on sait qu'il en a marché au moins un.

4.3 Les données relevées par les biologistes révèlent que la distance (en kilomètres par jour) parcourue par un écureuil de cette espèce est une variable aléatoire de moyenne 1.41 et de variance 0.25. En admettant que les déplacements quotidiens d'un écureuil sont indépendants, quelle est la probabilité qu'un écureuil parcoure plus de 520 kilomètres en une année ?

Problème 5 (12 points)

L'espace vectoriel V_3 est muni de la base orthonormée directe $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Remarque : les parties 5.1 et 5.2 de ce problème sont indépendantes.

5.1 On considère l'endomorphisme f de V_3 défini par sa matrice

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

relativement à la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

a) Déterminer les valeurs propres de f ainsi que les espaces propres associés.

b) Donner la nature géométrique de f.

5.2 On considère la rotation vectorielle r de V_3, d'angle 90°, dont l'axe est dirigé par le vecteur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$.

a) Déterminer une base orthonormée directe $(\vec{a};\vec{b};\vec{c})$ de V_3, relativement à laquelle la matrice de r est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calculer les composantes du vecteur $r(\vec{i})$ dans la base $(\vec{i};\vec{j};\vec{k})$.

Annexe au problème 1.4

Nom-prénom :	**Numéro :** ....

Il ne faut tracer la fonction h que dans un des deux repères ci-dessous. Il y en a deux afin de pouvoir recommencer en cas d'erreur.